

MEDIÇÕES ELÉTRICAS E RUÍDO EM ENSAIOS EXPERIMENTAIS

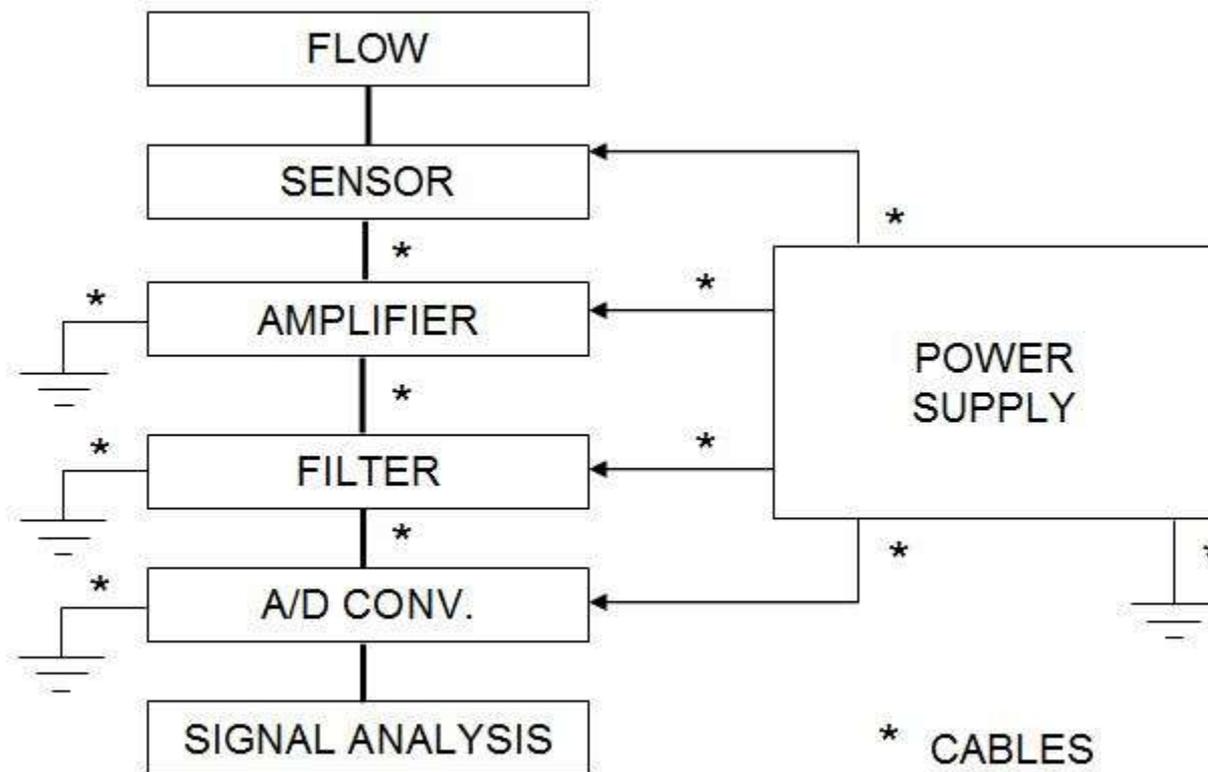
- **Introdução / Motivação**
- **Principais fontes de ruído em montagens experimentais;**
- **Métodos simples para a redução de ruído;**
- **Exemplos de implementação;**
- **Calibração de sensores;**
- **Resposta dinâmica de sensores**
 - De 1^a. Ordem
 - De 2^a. Ordem

Ruído e interferência: podem ocorrer em quase todas as aplicações de engenharia onde existe transmissão de informações



Redução de ruído em experimentos:

- Reduz o tempo total das campanhas de testes (tempo para ajustar os parâmetros e aquisição de dados);
- Reduz o esforço no processamento dos dados;
- Permite investigar fenômenos que envolvem flutuações de baixíssima amplitude. Ex. Transição do escoamento laminar para turbulento, aeroacústica;
- É importante gastar algum tempo antes dos experimentos procurando por fontes de ruído no aparato.



Contribuição em mais de um estágio:

- Fonte de alimentação, aterramento e cabos

- Perturbações atmosféricas (tempestades);
- Radiação de emissoras de rádio e TV;
- Ruídos parasitas gerados por interruptores, lâmpadas fluorescentes, etc...;
- Campos ruído de alimentação de equipamentos produzidos pela rede de distribuição de energia elétrica;
- Campos magnéticos de fuga originários de transformadores, motores, etc..., que induzem sinais parasitas nos circuitos de medição;
- A escolha da blindagem mais adequada depende da sensibilidade do sistema de medida;
- O uso de blindagem eletrostática é uma das técnicas mais comuns. Entretanto, cuidados devem ser tomados para que a introdução destes no circuito não provoque erros ainda maiores;

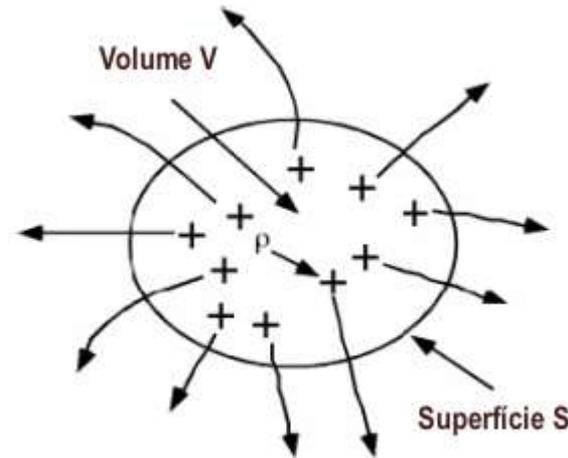
- Campo Elétrico

De acordo com a lei de Gauss:

“O fluxo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional a carga elétrica no interior dessa superfície”

$$\Phi_E \varepsilon_0 = q$$

Onde q é a carga, Φ é o fluxo e ε uma constante de permissividade do vácuo



O fluxo elétrico é uma medida do campo elétrico que atravessa uma superfície: $\Phi_E = \oint E \cdot ds$

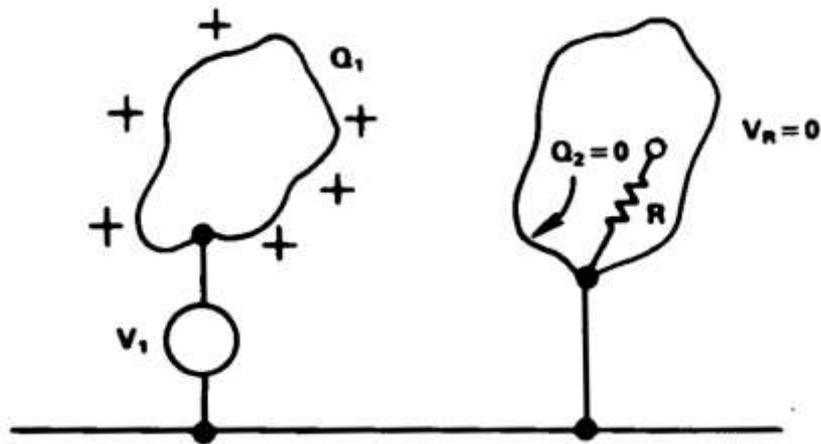
Logo: $q = \varepsilon_0 \oint E \cdot ds$

MENSAGEM: DEPENDE DA CARGA!! (VOLTAGEM)

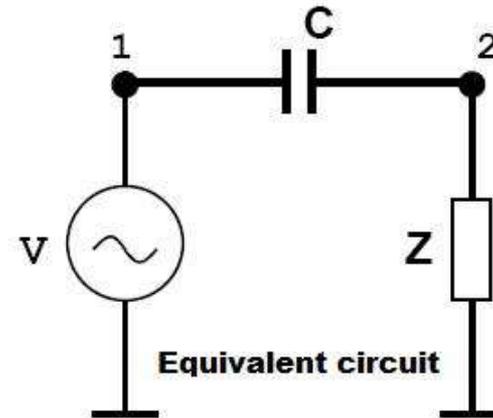
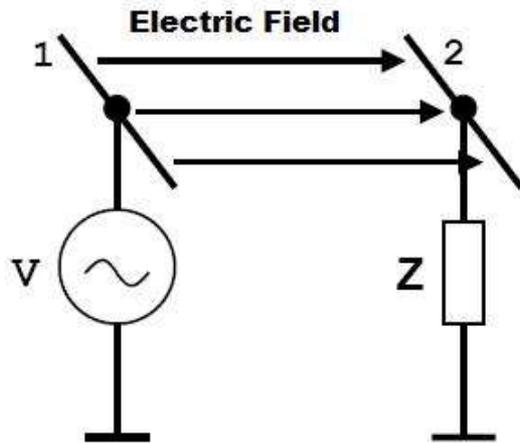
- Campo Elétrico

Gaiola de Faraday:

-O campo elétrico externo a uma casca metálica não é capaz de criar cargas no interior casca.



Interferência Capacitiva

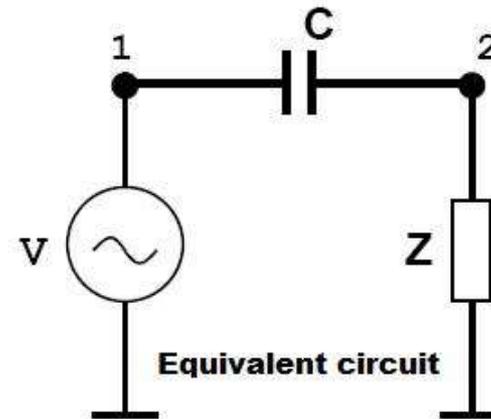
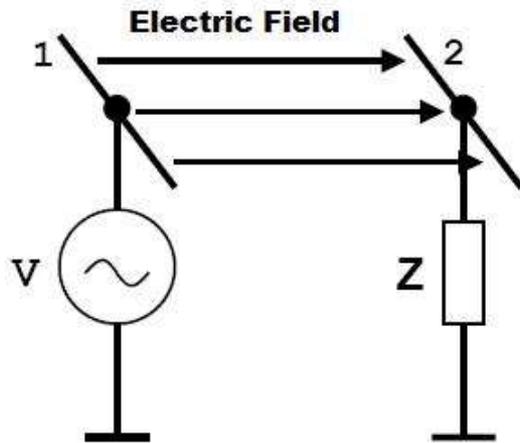


Equação do capacitor. $C \frac{dV}{dt} = i$

Logo, se $dV/dt=0$ então $i=0$. Assim, não há corrente no sistema para sinais invariantes no tempo.

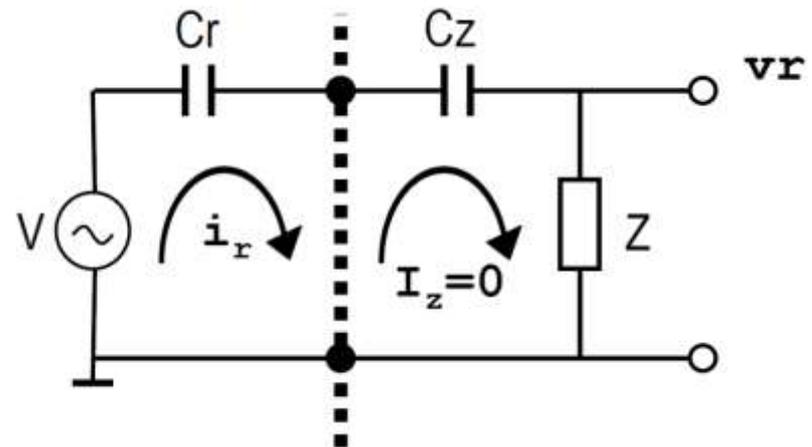
A medida que se eleva a frequência do sinal V (oscilações mais rápidas), dV/dt cresce a corrente transmitida a Z também aumenta.

Interferência Capacitiva

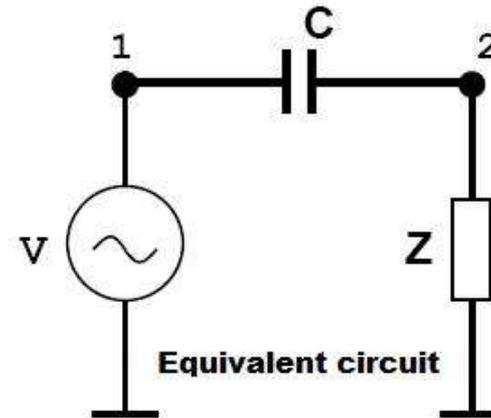
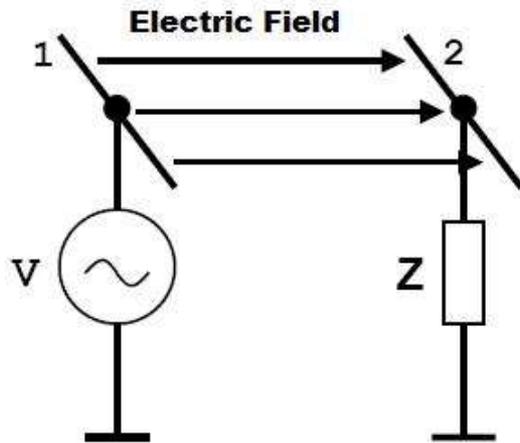


Como reduzir?

Acrescentar caminhos de baixa impedância que o sinal de interferência não contamine o circuito de medição.

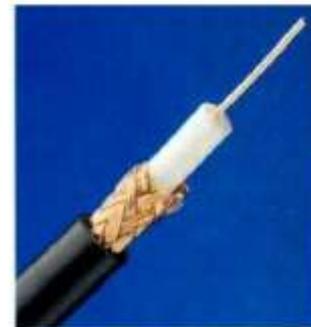
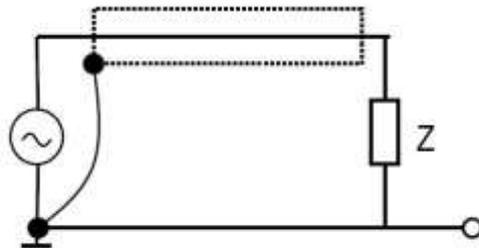


Interferência Capacitiva

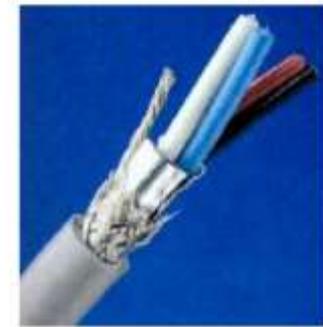


Como reduzir?

Cabos coaxiais: Com aterramento em 1 ponto

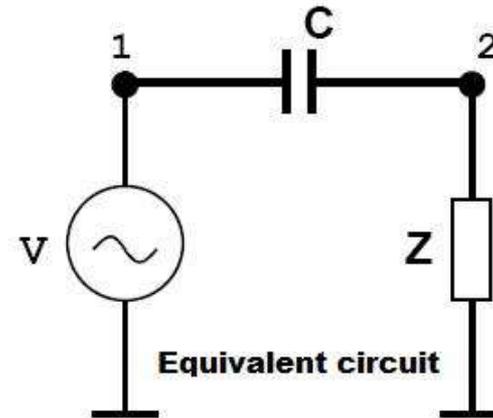
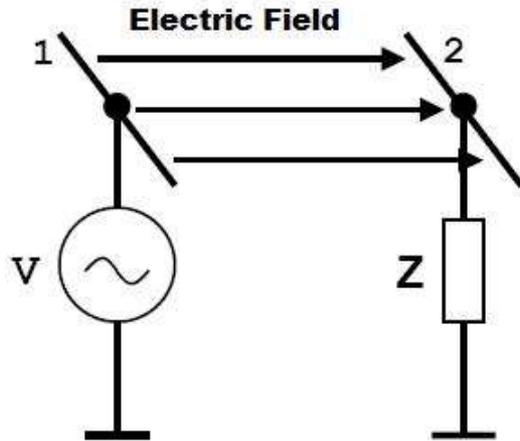


Cabo Coaxial Fino



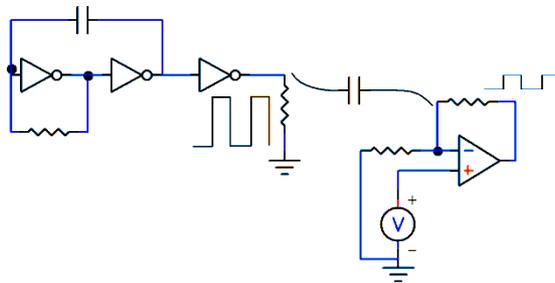
Cabo Coaxial Grosso

Interferência Capacitiva

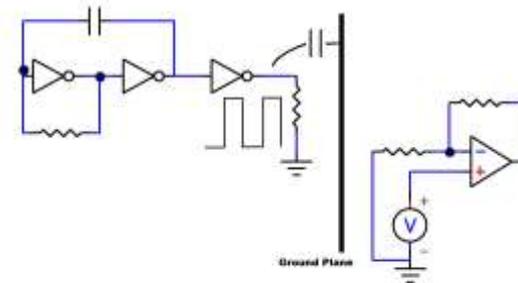


Como reduzir?

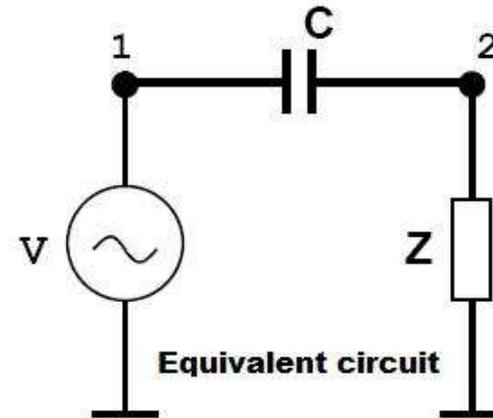
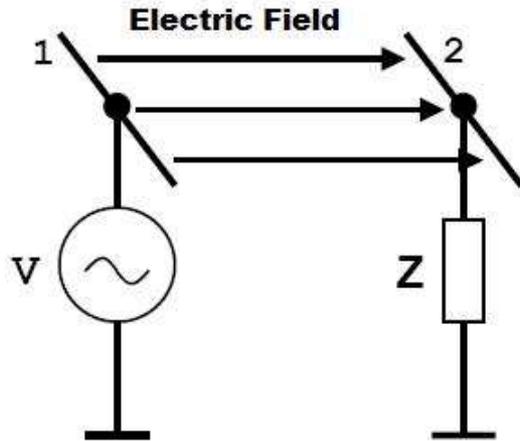
Circuitos



Circuitos

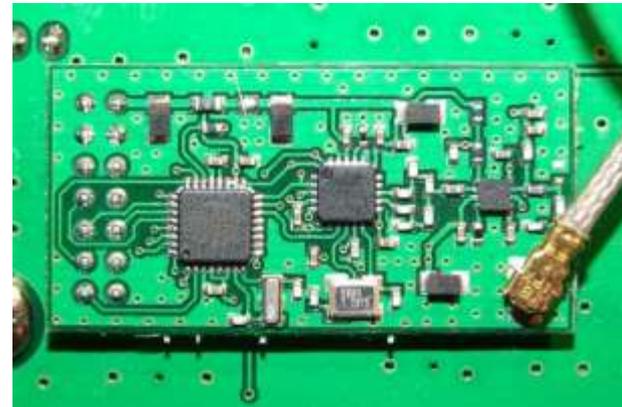
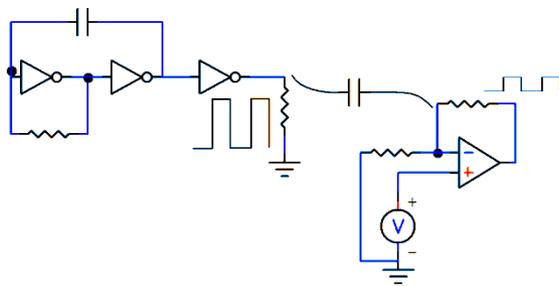


Interferência Capacitiva

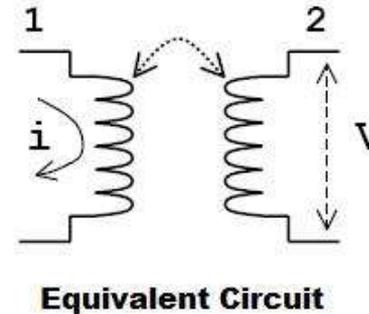
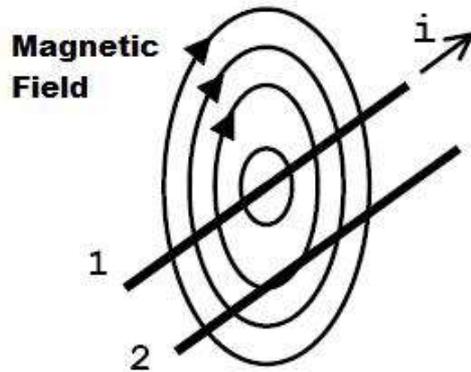


Como reduzir?

Circuitos



Interferência Indutiva



Equação do circuito: $V = M \frac{di}{dt}$

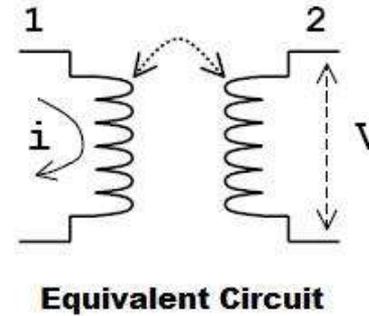
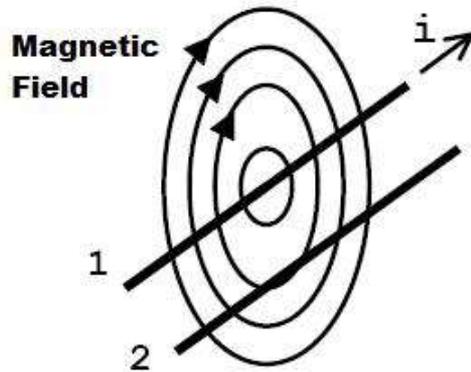
MENSAGEM: DEPENDE DA CORRENTE!!

onde M é a indutância mútua, que depende da forma do circuito e da distância entre eles.

Logo, se $di/dt=0$ então $V=0$. Assim, não há tensão induzida para correntes invariantes no tempo.

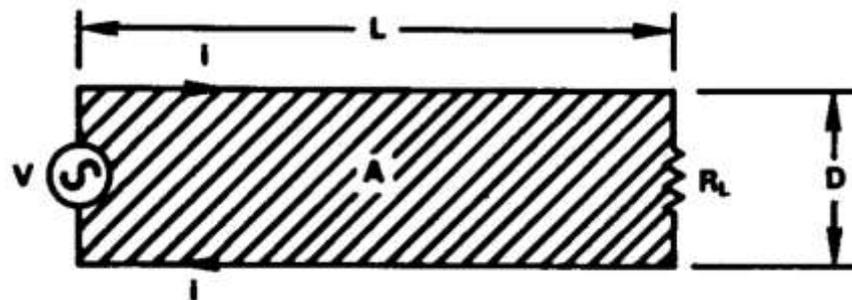
A medida que di/dt cresce a tensão transmitida também aumenta.

Interferência Indutiva

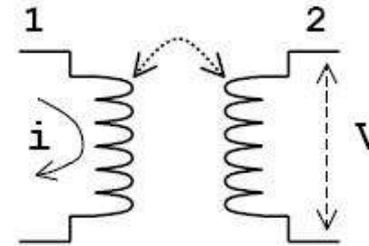
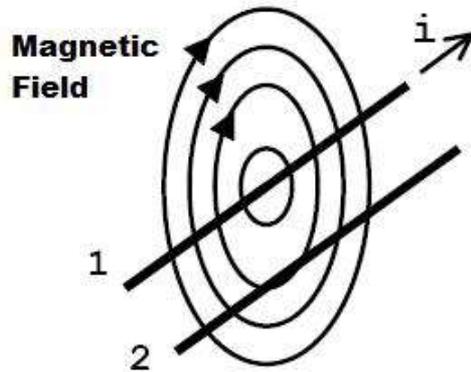


Esse tipo de acoplamento é difícil de reduzir

Uma das formas de se reduzir esse acoplamento consiste em diminuir a área de loop de corrente (redução na emissão)



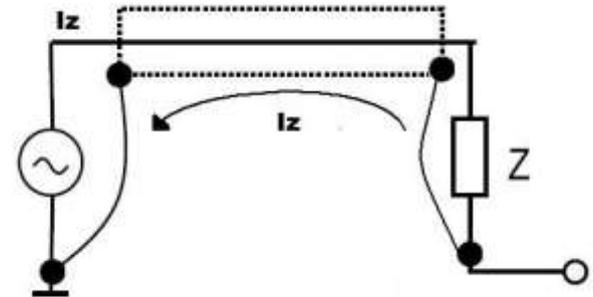
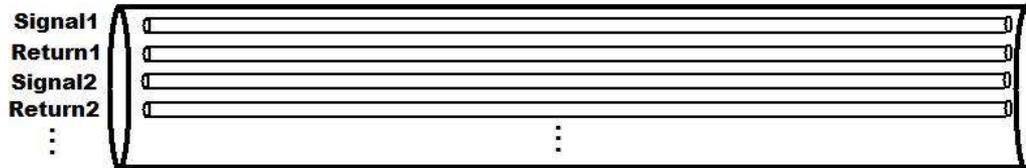
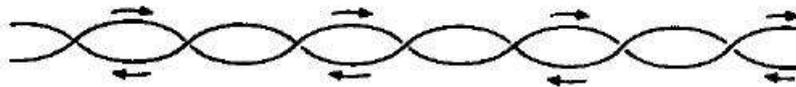
Interferência Indutiva



Equivalent Circuit

Como reduzir?

Cabos:



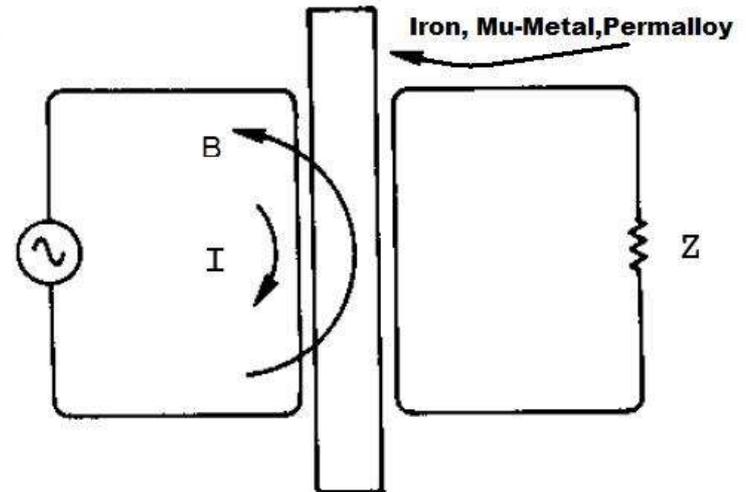
Interferência Indutiva

Como reduzir?

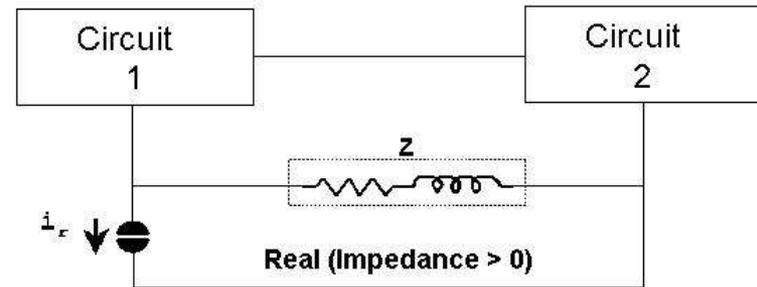
Uma outra forma, normalmente mais cara, é a blindagem utilizando caixas metálicas para os circuitos. Aço, Mu-Metal são as mais utilizadas

Penetração do campo magnético em alguns materiais usados em blindagens

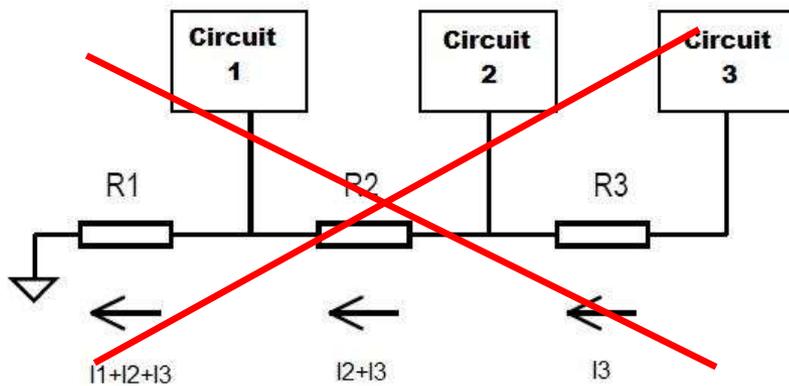
Freq[Hz]	Cobre[mm]	Alumínio[mm]	Aço[mm]
60	8,5	10,9	0,86
100	6,6	8,5	0,66
1K	2,1	2,7	0,2
10K	0,66	0,84	0,08
100K	0,2	0,3	0,02
1M	0,08	0,08	0,008



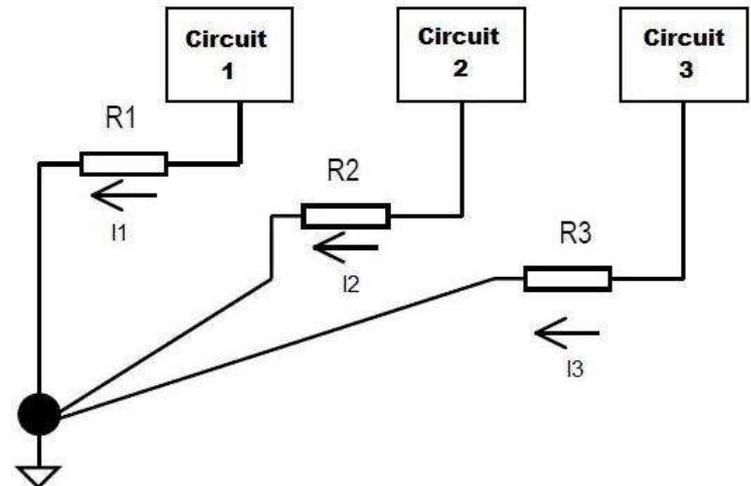
Loop de terra



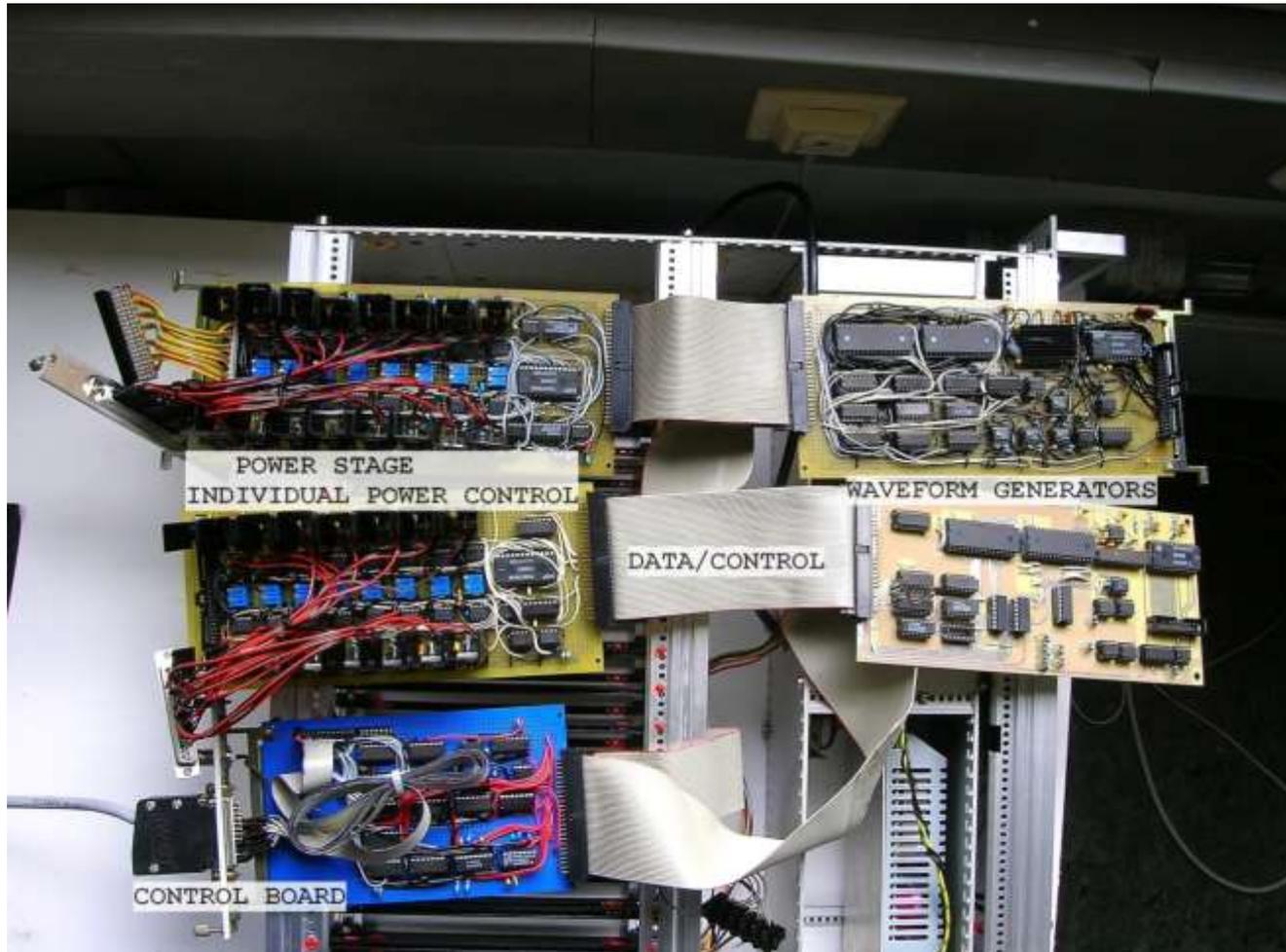
Erro comum

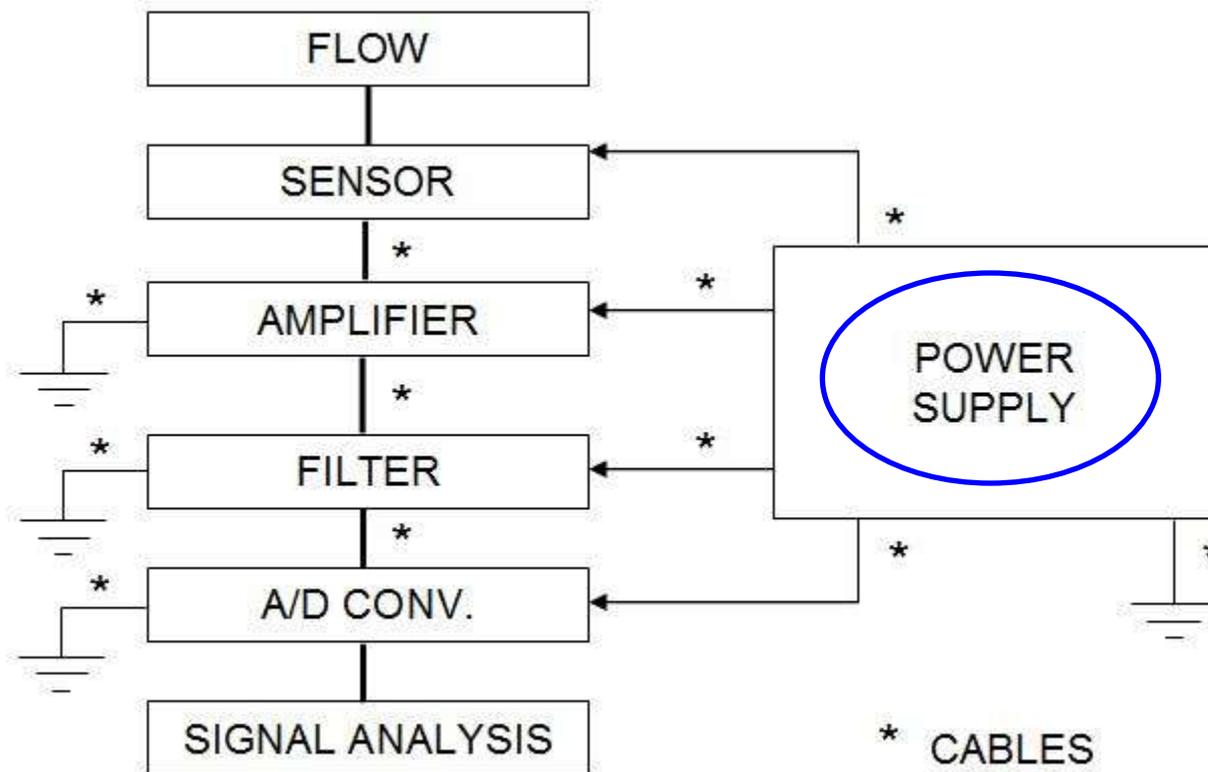


Conexão correta



Aplicação dos conceitos: Circuito de um gerador de funções de 128 canais





Contribuição em mais de um estágio:

- **Fonte de alimentação**, aterramento e cabos

Tipos de fonte de alimentação:

- **Não Regulada**: Possui somente um retificador seguido de capacitores e indutores para suavizar as flutuações do sinal. Não há regulação da voltagem de saída, de modo que ela pode variar de acordo com a carga demandada. A oscilação do sinal também é maior quando a demanda de carga é mais elevada.
- **Regulada**: : Usa transistores para a regulação da voltagem a uma tensão de referência. Assim, a voltagem não varia com a carga demandada. Esse tipo de fonte pode ser subdividido em:
 - Fontes reguladas lineares
 - Fontes reguladas por chaveamento (ou simplesmente fontes chaveadas)



Tipos de fonte de alimentação:

- **Fontes reguladas lineares:** Nas fontes lineares a tensão é controlada por um regulador analógico baseado em um transistor operando em regime contínuo.

- **Fontes chaveadas:** Nas fontes chaveadas sinal é ligado e desligado em uma frequência alta (10kHz-1MHz) e o duty cycle do sinal é variado para regular a voltagem dentro dos limites requeridos.

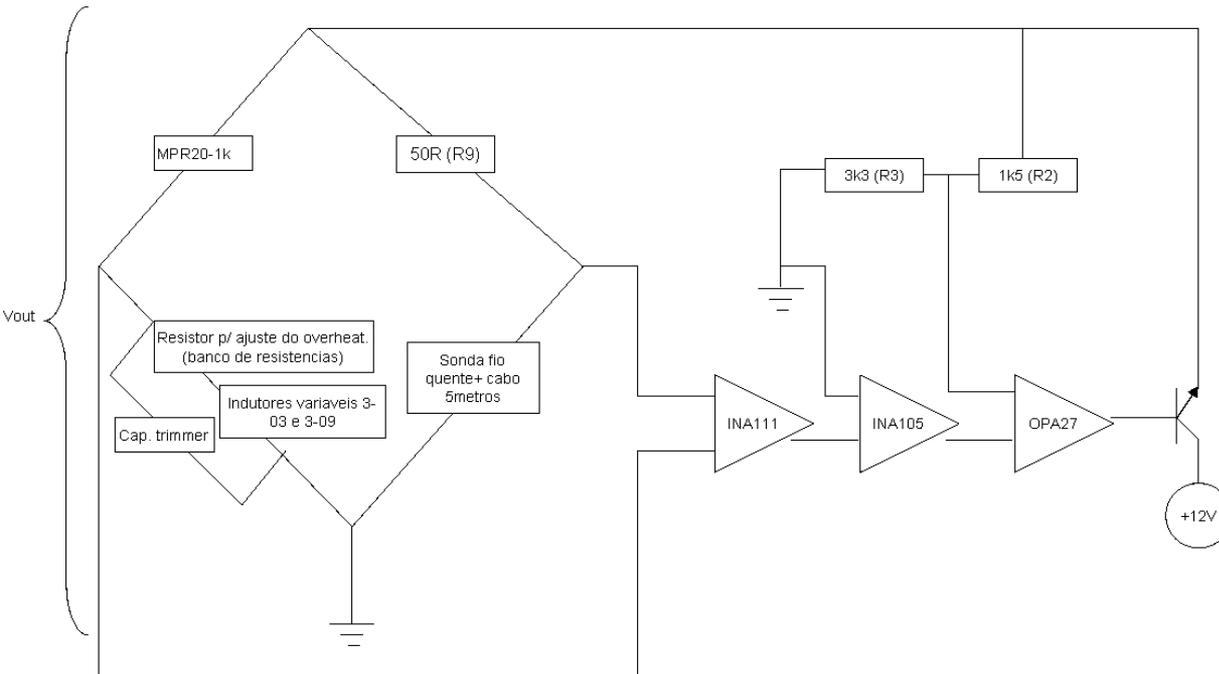


Tipos de fonte de alimentação:

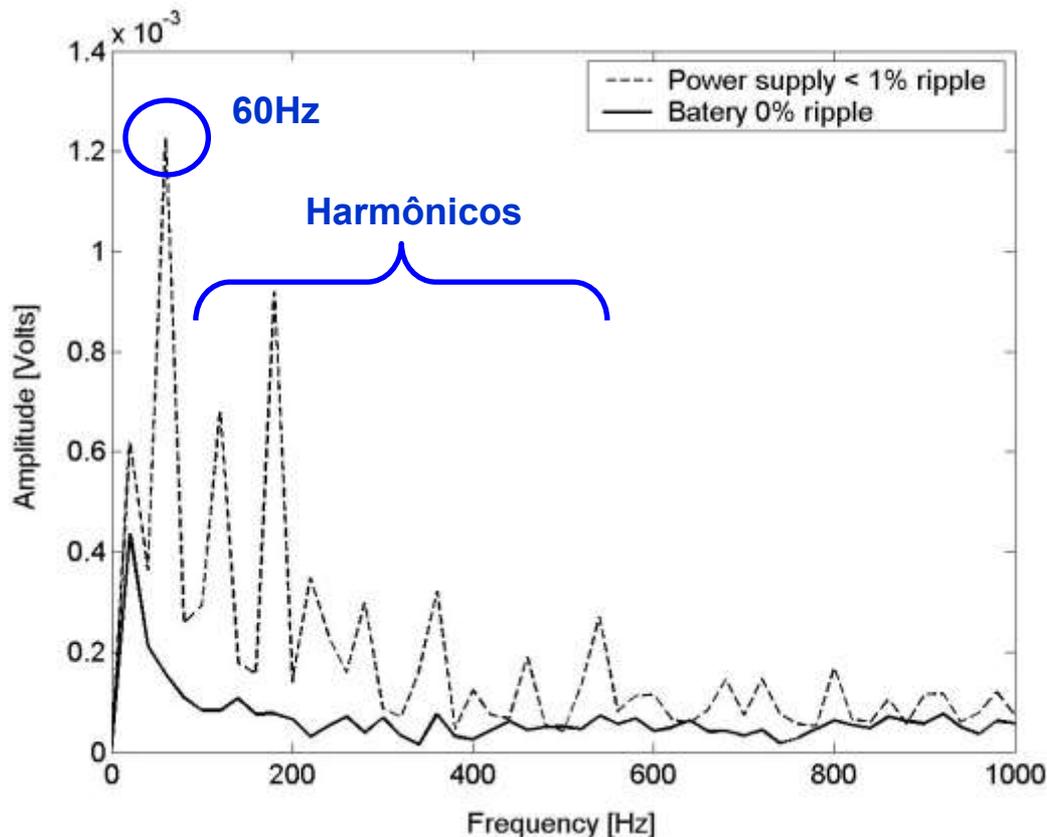
TIPO DE REGULADOR	VANTAGENS	DESVANTAGENS
Fonte Regulada Linear	<ul style="list-style-type: none">• Baixo nível de ruído• Construção simples	<ul style="list-style-type: none">• Baixa eficiência• Alto fluxo de calor dissipado• Tamanho
Fonte chaveada	<ul style="list-style-type: none">• Altamente eficiente• Pode ser bem compacta• Baixo fluxo de calor dissipado	<ul style="list-style-type: none">• Ripple e ruído podem ser maiores que em fonte linear• Emissão de campo magnético e elétrico deve ser levada em consideração, uma vez que chaveamento pode causar interferências nos circuitos próximos

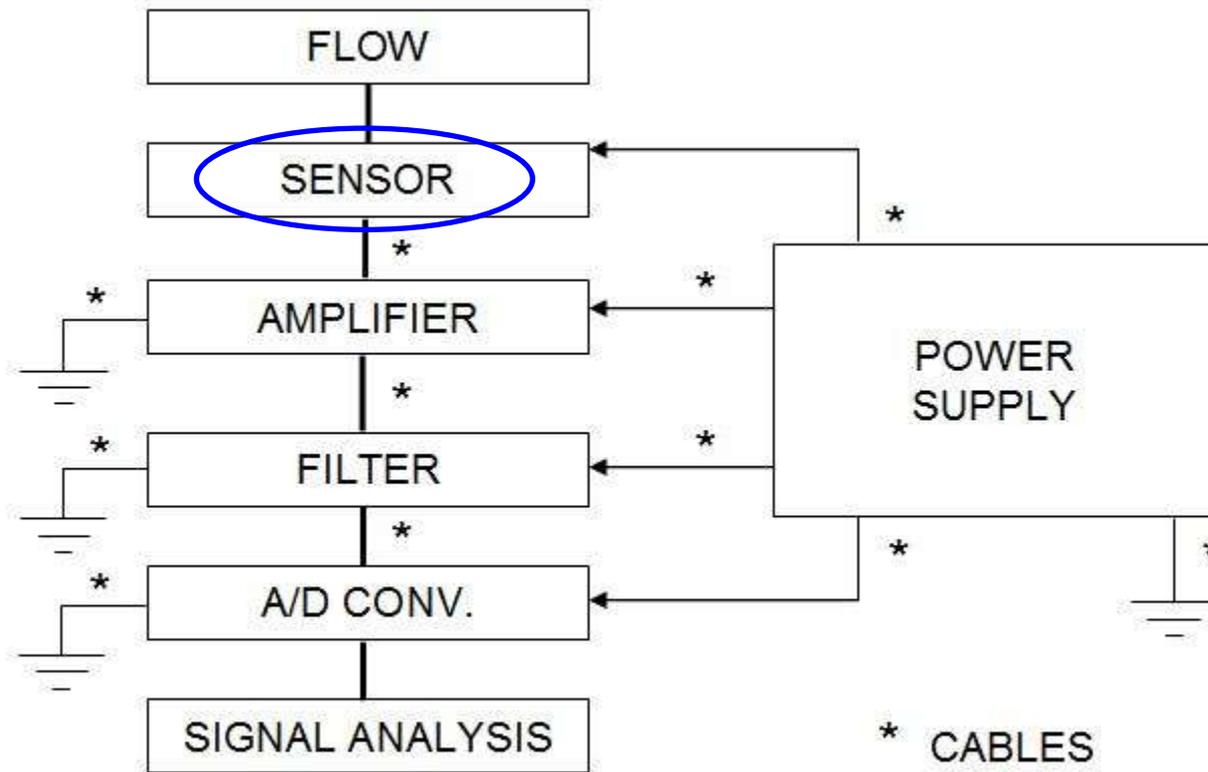
Instrumento testado: Anemômetro a fio quente. Usado para medição de velocidade em fluidos. (Será visto ao longo do curso)

Diagrama simplificado CTA



Instrumento testado: Anemômetro a fio quente. Usado para medição de velocidade em fluidos. (Será visto ao longo do curso)





- Operação que, sob determinadas condições, estabelece a relação entre as medições feitas com um instrumento em comparação com um padrão, acompanhada das incertezas associadas.

- As incertezas dos medidores padrões podem ser avaliadas antes da calibração. É prática comum na indústria exigir que a calibração desses instrumentos seja rastreável¹.
 1. *Propriedade do resultado de uma medição ou do valor de um padrão estar relacionado a referências estabelecidas, geralmente a padrões nacionais ou internacionais, através de um cadeia contínua de comparações, todas tendo incertezas estabelecidas*

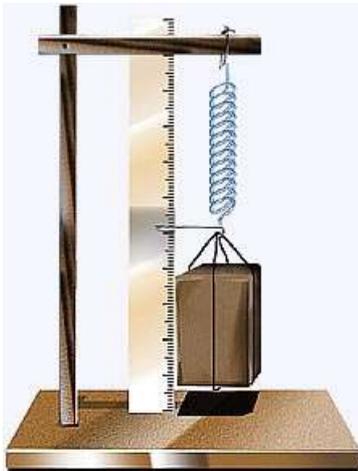
- De acordo com a incerteza requerida para a calibração é possível saber se os instrumentos e o processo de calibração proposto é adequado.

- Equações de calibração podem ser de diferentes ordens, lineares e não-lineares, dependendo do instrumento calibrado.

- **Ex.: Balança de mola**

Ex.: Anemômetro a fio quente

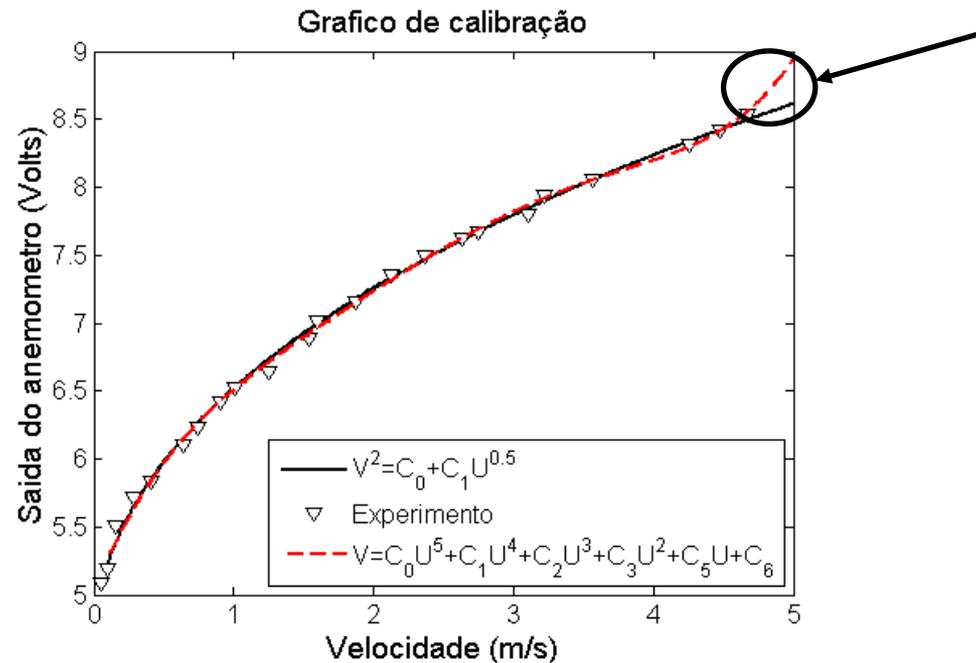
$$m = C\Delta x$$



$$V^2 = C_0 + C_1U^{1/2}$$

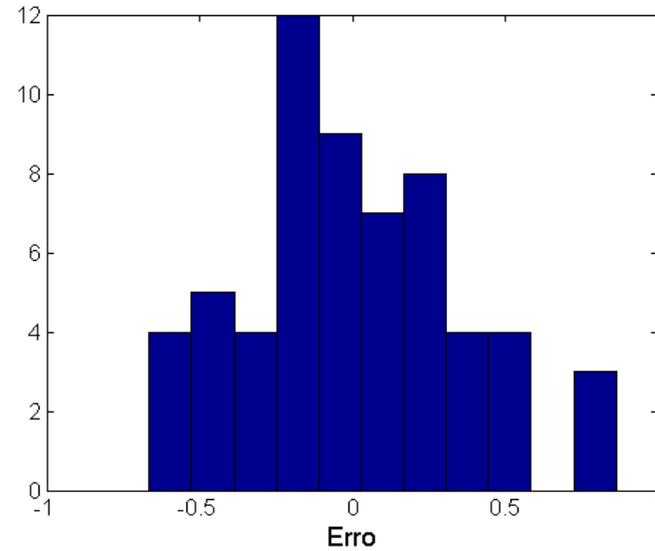
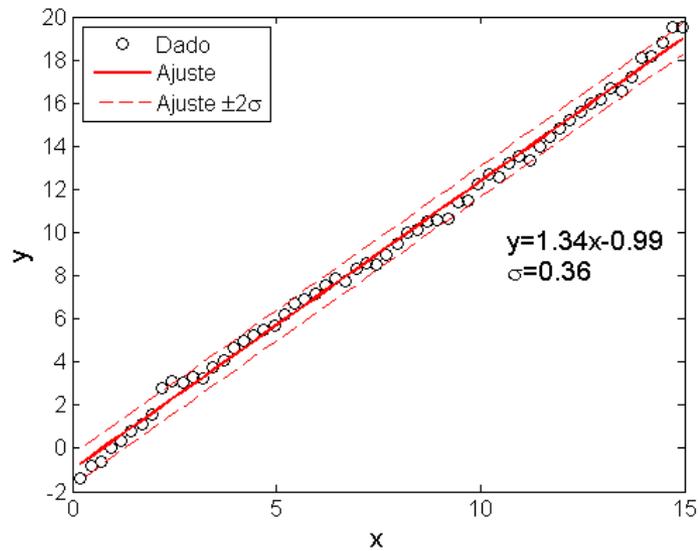


- Na utilização de relações que não descrevem o comportamento físico do sistema, deve-se tomar bastante cuidado em medições além da faixa de calibração.
- **Ex.: Anemômetro a fio quente.** Calibração com função baseada na física do equipamento e resposta de polinômio de calibração



- **Influência de parâmetros não controlados.**

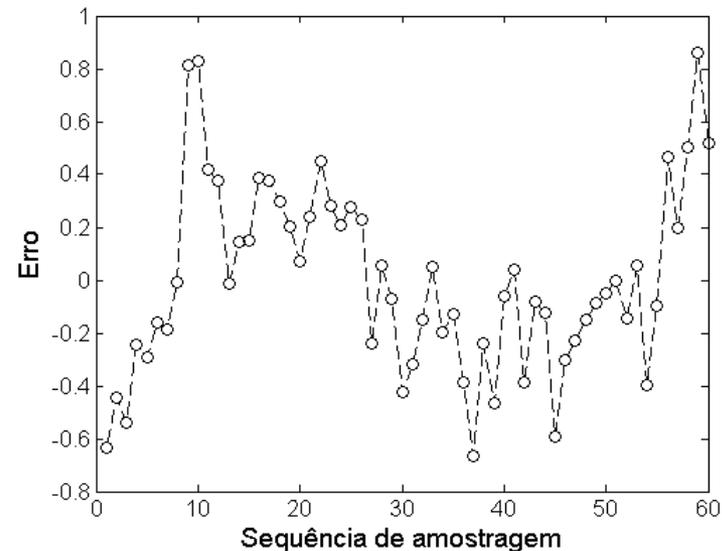
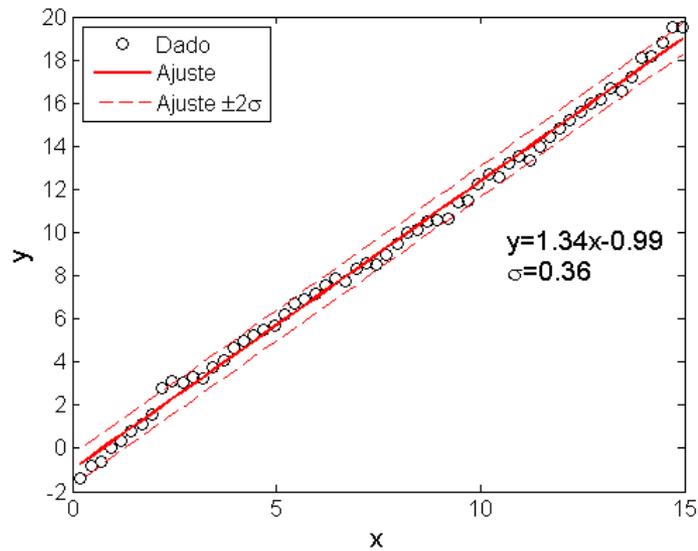
- **Ex.: $y(i)=1.2*x(i)+\text{ruído_aleatório}(i)+\text{ruído_determinístico}(i)$**



- O erro padrão é baixo e a distribuição do erro lembra gaussiana (não é bem claro que é uma distribuição normal, precisa de teste estatístico).
- Se a função original não fosse conhecida a calibração poderia parecer Ok

- **Influência de parâmetros não controlados.**

- **Ex.: $y(i) = 1.2 \cdot x(i) + \text{ruído_aleatório}(i) + \text{ruído_determinístico}(i)$**

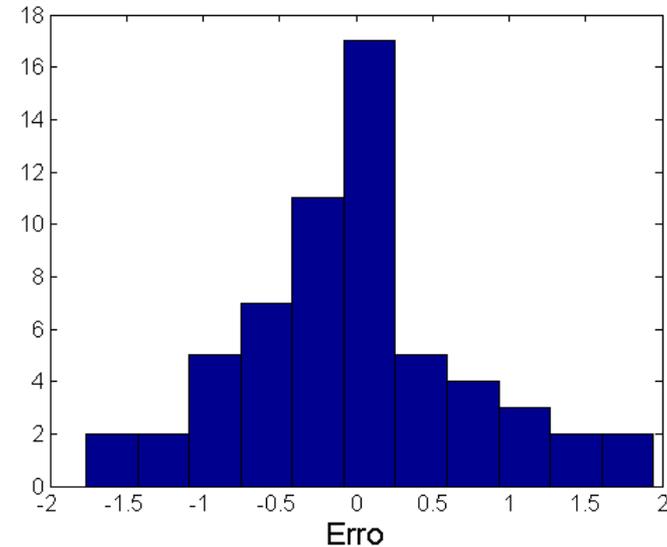
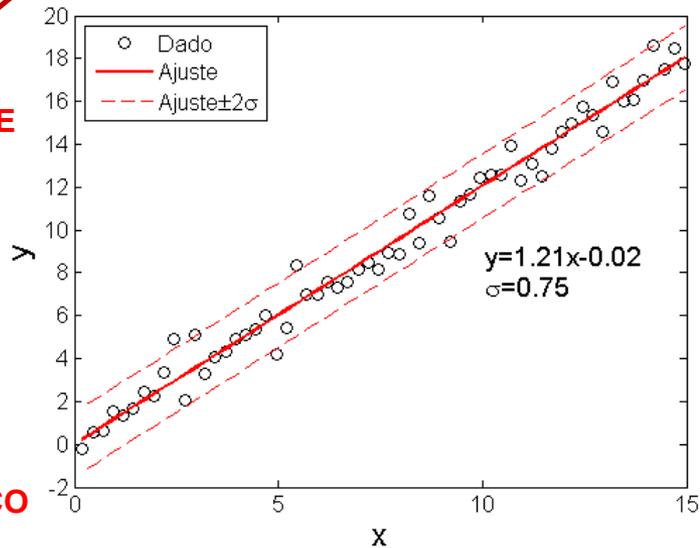


- Observando-se o comportamento do erro a partir da sequência de amostragem observa-se que uma flutuação do erro ao longo da calibração.
- Comportamento típico de casos onde fatores externos, não controlados, influenciam a calibração.

- Influência de parâmetros não controlados.

- **Ex.2:** $y(i) = 1.2 * x(i_{rand}) + \text{ruído_aleatório}(i_{rand}) + \text{ruído_determinístico}(i)$

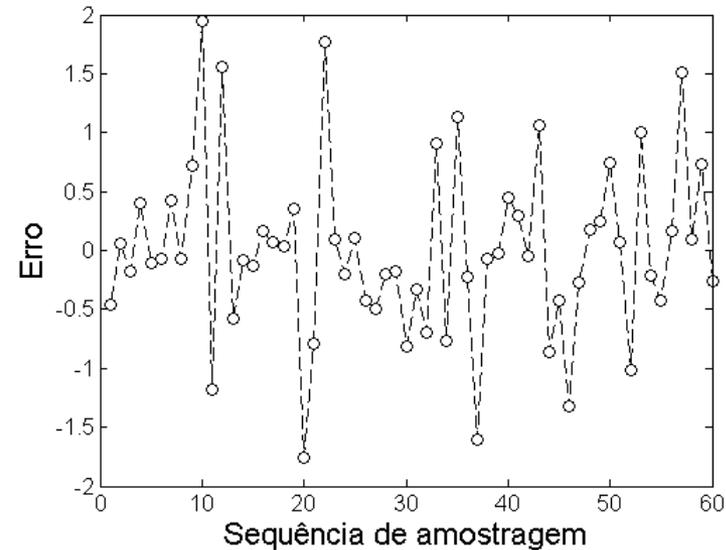
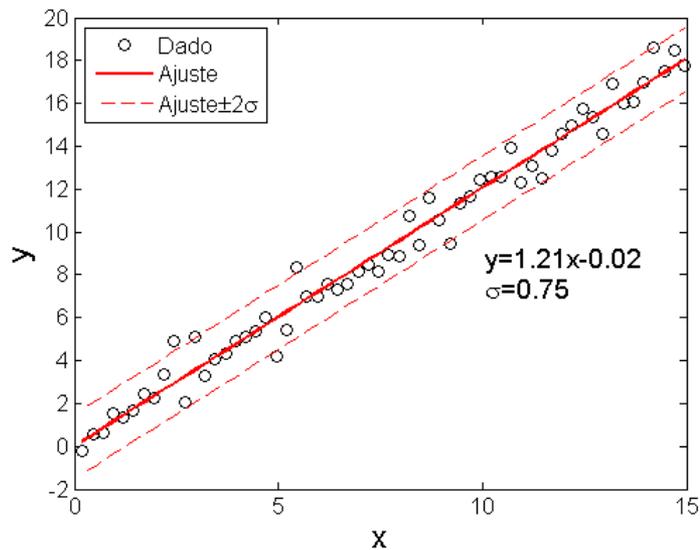
OS VALORES DE CADA TERMO SÃO OS MESMOS DO EXEMPLO ANTERIOR, SOMENTE A ORDEM EM RELAÇÃO AO RUÍDO DETERMINÍSTICO FOI ALTERADA



- Observa-se que o desvio dos dados é muito maior.
- O histograma dos erros fica com uma distribuição muito mais próxima da gaussiana.
- Os valores reais da função são ajustados sem nenhuma tendência (*bias*) aparente.

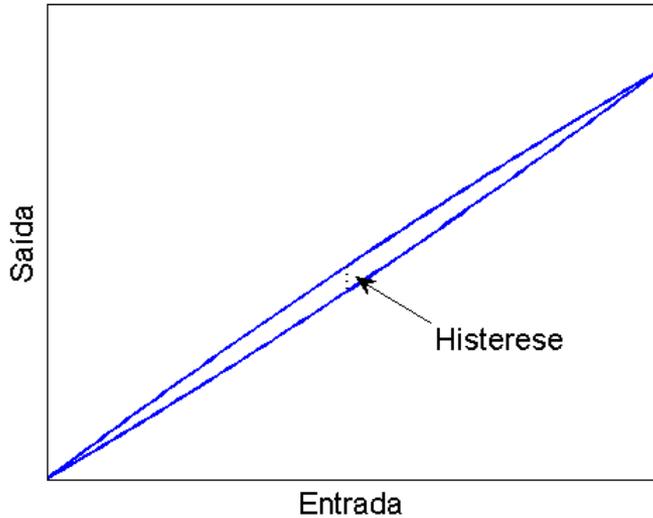
- Influência de parâmetros não controlados.

- **Ex.2:** $y(i) = 1.2 * x(i_{rand}) + \text{ruído_aleatório}(i_{rand}) + \text{ruído_determinístico}(i)$

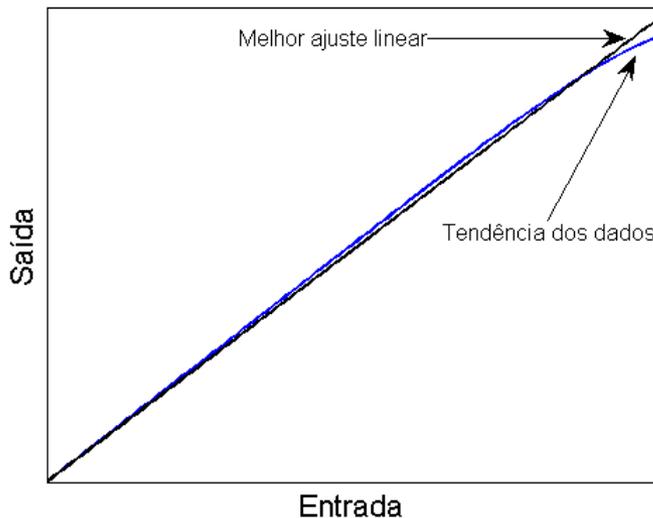


- A distribuição de erros não apresenta nenhuma tendência ao longo da sequência de amostragem.
- **MENSAGEM: Se não estiver seguro de que todas as variáveis importantes para a calibração estão bem controladas, o mais prudente é realizar a amostragem aleatória.**

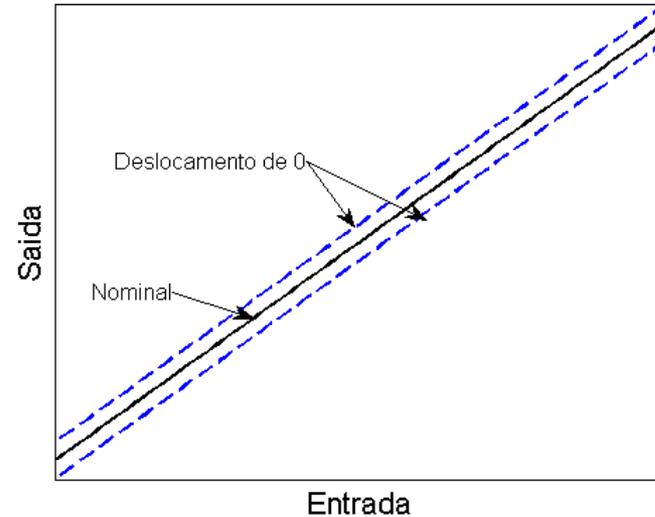
- Histerese



Linearidade



- deslocamento de 0



- A amostragem aleatória dilui o efeito da histerese na calibração (aumenta o desvio)
- Normalmente o deslocamento de zero pode ser corrigido antes das medições

- Para a medição de sinais dinâmicos, é necessário avaliar como o sensor é capaz de responder a variações da grandeza medida;
- Mesmo no caso de medidas estáticas, o tempo de estabilização das leituras dos sensores é importante para as medições.
- A modelagem matemática é usada para se prever o comportamento dinâmico dos sistemas de medição

SISTEMAS DE ORDEM 0

- Modelo mais básico. Representado pela equação diferencial de ordem 0, do tipo:

$$y = K \cdot f(t)$$

onde K é a sensibilidade e $f(t)$ é o sinal de entrada.

- Sistemas de ordem zero são usados para modelar a resposta de sensores a entradas estáticas (calibração estática).

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Sensores com capacidade acumulativa ou dissipativa não são capazes de responder imediatamente a variações na entrada. Este tipo de sistema pode ser modelado usando uma equação diferencial de primeira ordem, da forma:

$$\tau \dot{y} + y = K \cdot f(t)$$

onde τ é a constante de tempo do sistema e \dot{y} é a derivada de y em relação ao tempo (dy/dt).

- Normalmente, para se analisar a resposta de um sistema a uma variação na entrada aplica-se uma função do tipo degrau ou uma função periódica.
- Aplicando-se uma perturbação do tipo degrau, do tipo $f(t) = A$, para $t > 0$ e dando uma condição inicial ao sistema $y(t=0) = y_0$, temos que:

$$\tau \dot{y} + y = KA \Rightarrow \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{KA}{\tau}$$

Equação linear de 1ª ordem. Permite solução por fatores integrantes

SISTEMAS DE ORDEM 1

$$\tau \dot{y} + y = KA \Rightarrow \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{KA}{\tau}$$

Equação linear de 1ª ordem. Permite solução por fatores integrantes.

Para permitir a integração da equação, o fator $\mu(t)$ deve satisfazer a condição:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)h(t)y = \frac{d}{dt} [\mu(t)y]$$

- Na eq. acima $h(t) = 1/\tau$
- Resolvendo a equação tem-se $\mu(t) = e^{t/\tau}$.
- Substituindo na eq. do sistema:

$$e^{t/\tau} y = \int \frac{KAe^{t/\tau}}{\tau} dt + C \Rightarrow y = KA + Ce^{-t/\tau}$$

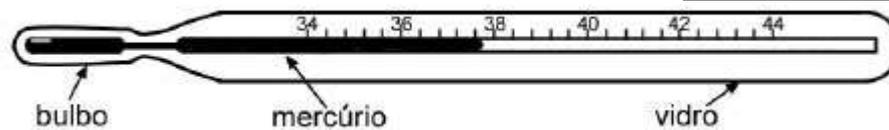
Aplicando-se a condição inicial $y(t=0) = y_0$: $C = y_0 - KA$

- Logo:

$$y = KA + (y_0 - KA)e^{-t/\tau}$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Ex.: Termômetro de bulbo



SISTEMAS DE ORDEM 1

- Ex.: Termômetro de bulbo

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}$$

- Armazenamento de energia com a variação de temperatura do bulbo:

$$\frac{dE}{dt} = mc_v \frac{dT}{dt}$$

- Troca de energia com o ambiente:

$$\dot{Q} = hA_B \Delta T = hA_B (T_\infty - T)$$

- De acordo com a 1ª lei da termodinâmica temos:

$$mc_v \frac{dT}{dt} = hA_B (T_\infty - T)$$

- Reorganizando temos:

$$\frac{mc_v}{hA_B} \frac{dT}{dt} + T = T_\infty$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Ex.: Termômetro de bulbo

- Definindo o coeficiente de expansão volumétrica como: $\alpha = (dV/V)/dT$

- Para o caso do termômetro (cilindro), onde L é a leitura do sensor

-
$$dV = A_S dL$$

- Substituindo: $A_S dL/V = dT\alpha$; $dL = \alpha V / A_S dT$

- Integrando-se e assumindo L=0 para T=0, tem-se:

$$L = \frac{m\alpha}{\rho A_S} T, \quad \text{onde} \quad V = \frac{m}{\rho}$$

- Substituindo na eq. do termômetro:
$$\frac{mc_v \rho A_S}{hA_B m \alpha} \frac{dL}{dt} + \frac{\rho A_S}{m \alpha} L = T_\infty$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Ex.: Termômetro de bulbo
- Agrupando os coeficientes, podemos reescrever a eq. como:

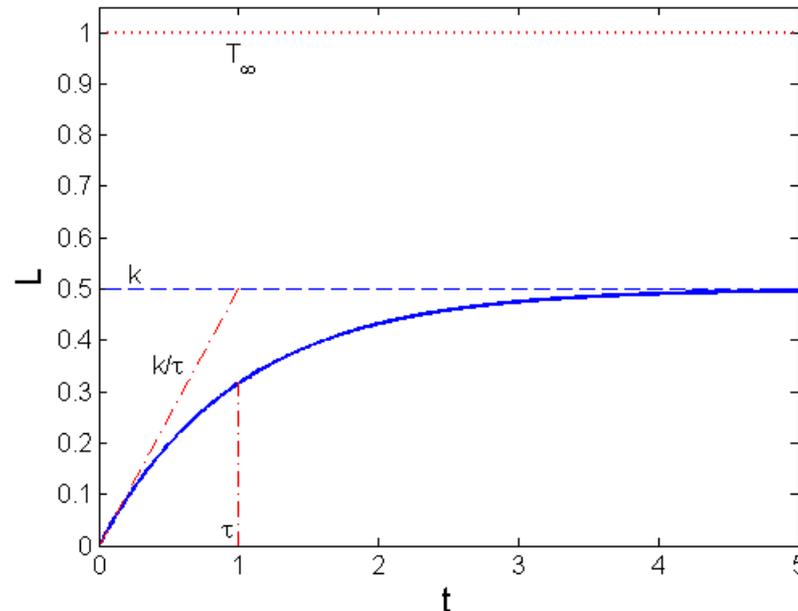
$$\frac{mc_v}{hA_B} \frac{dL}{dt} + L = \frac{m\alpha}{\rho A_S} T_\infty; \text{ ou}$$

$$\tau \frac{dL}{dt} + L = KT_\infty \quad \text{Similar ao modelo geral de 1ª ordem}$$

- Onde: $\tau = \frac{mc_v}{hA_B} \frac{dT}{dt}; \quad K = \frac{m\alpha}{\rho A_S}$
- Admite a mesma solução geral: $y = K \cdot A + (y_0 - KA)e^{-t/\tau}$
- No caso do termômetro fica: $L = K \cdot T_\infty + (L_0 - KT_\infty)e^{-t/\tau}$

SISTEMAS DE ORDEM 1

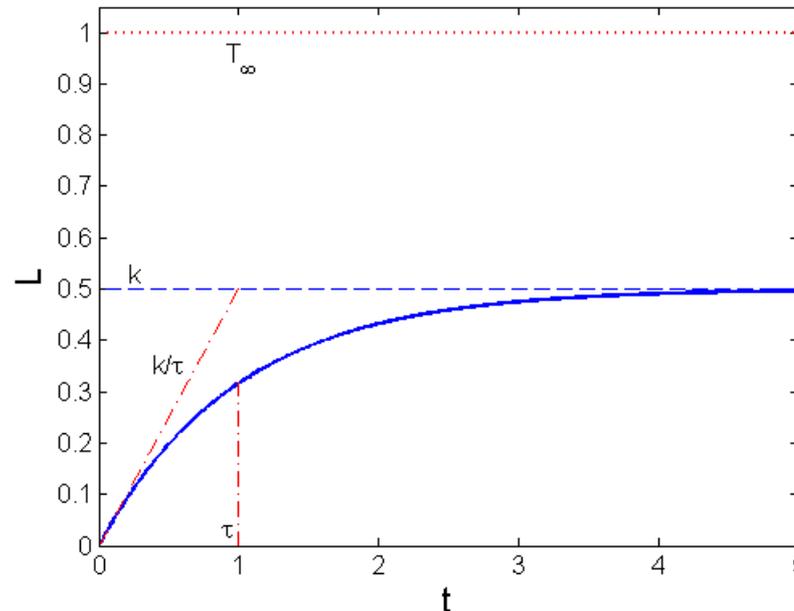
- **Ex.: Termômetro de bulbo** $L = K \cdot T_{\infty} + (L_0 - KT_{\infty})e^{-t/\tau}$



- Para tempos longos, L se aproxima de K . Portanto, K , é a sensibilidade do instrumento
- A velocidade com que o termômetro responde à entrada depende da tangente inicial da curva de resposta (K/τ).

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Ex.: Termômetro de bulbo $L = K \cdot T_{\infty} + (L_0 - KT_{\infty})e^{-t/\tau}$



- Como $k \propto 1/A_S$, uma diminuição na área do tubo do termômetro causa um aumento da sua sensibilidade.
- Já $\tau \propto 1/A_b$, indicando que uma maior área do bulbo em contato com o meio reduzirá o tempo de resposta do termômetro

SISTEMAS DE ORDEM 1

Avaliando comportamento a partir de uma perturbação do tipo senoidal.

$$\tau \dot{y} + y = K A \operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{K A \operatorname{sen}(\omega t)}{\tau}$$

Equação linear de 1ª ordem. Permite solução por fatores integrantes.

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t) h(t) y = \frac{d}{dt} [\mu(t) y]$$

- Na eq. acima $h(t) = 1/\tau$. Resolvendo a equação tem-se $\mu(t) = e^{t/\tau}$.
- Substituindo na eq. do sistema:

$$e^{t/\tau} y = \int \frac{K A \operatorname{sen}(\omega t) e^{t/\tau}}{\tau} dt + C \Rightarrow y = \frac{K A}{\tau e^{t/\tau}} \int \operatorname{sen}(\omega t) e^{t/\tau} dt + C e^{-t/\tau}$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Usando a integração por partes:

$$I = uv - \int v du$$

- Onde:

$$u = \text{sen}(\omega t); \quad dv = e^{t/\tau} dt$$

$$du = \omega \cos(\omega t); \quad v = \tau e^{t/\tau}$$

- Obtêm-se na 1ª iteração:

-

$$I = \tau \text{sen}(\omega t) e^{t/\tau} - \int \tau \omega \cos(\omega t) e^{t/\tau} dt$$

- Na 2ª iteração:

$$J = \tau^2 \omega \cos(\omega t) e^{t/\tau} + \tau^2 \omega^2 \int \text{sen}(\omega t) e^{t/\tau} dt = \tau^2 \omega \text{sen}(\omega t) e^{t/\tau} + \tau^2 \omega^2 I$$

- Assim:

$$I(1 + \tau^2 \omega^2) = \tau \text{sen}(\omega t) e^{t/\tau} - \tau^2 \omega \cos(\omega t) e^{t/\tau}$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Substituindo I na equação da perturbação:

- $$L = \frac{KA}{1 + \tau^2 \omega^2} [\text{sen}(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t)] + C e^{-t/\tau}$$

- Rearranjando usando a relação:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} [\text{sen}(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t)] = \text{sen}(\omega t - \tan^{-1}(\omega \tau))$$

- E substituindo na equação da perturbação, temos:

$$L = \frac{KA}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} [\text{sen}(\omega t - \tan^{-1}(\tau \omega))] + C e^{-t/\tau}$$

- O 1º termo do lado direito da equação se refere a solução periódica em regime permanente.
- Já o termo que contém a constante C depende das condições iniciais do problema. Esse termo se refere a parte transiente da solução

SISTEMAS DE ORDEM 1

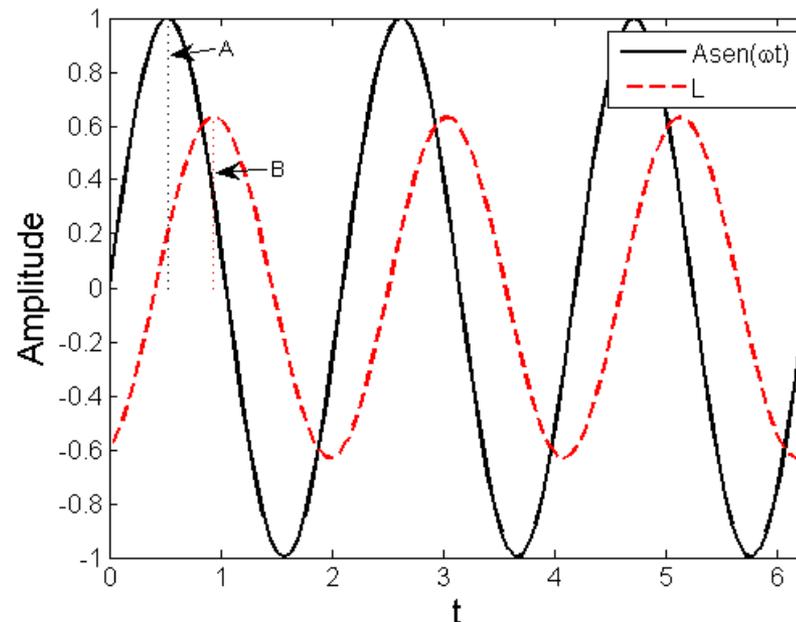
- Para facilitar a análise vamos analisar o sistema em regime permanente e reescrever a eq. em função de um termo de amplitude e outro de fase:

$$L = B(\tau\omega)[\text{sen}(\omega t + \phi(\omega\tau))]$$

- Onde:

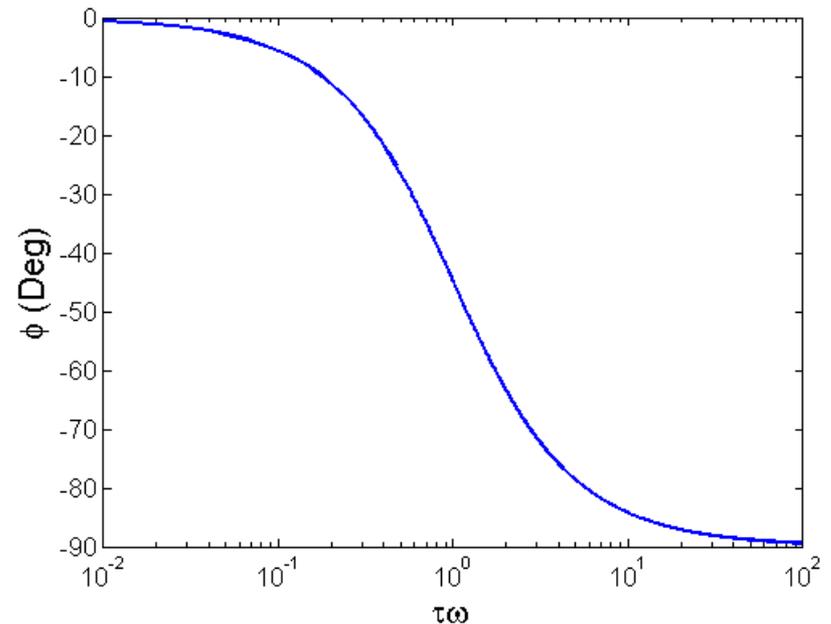
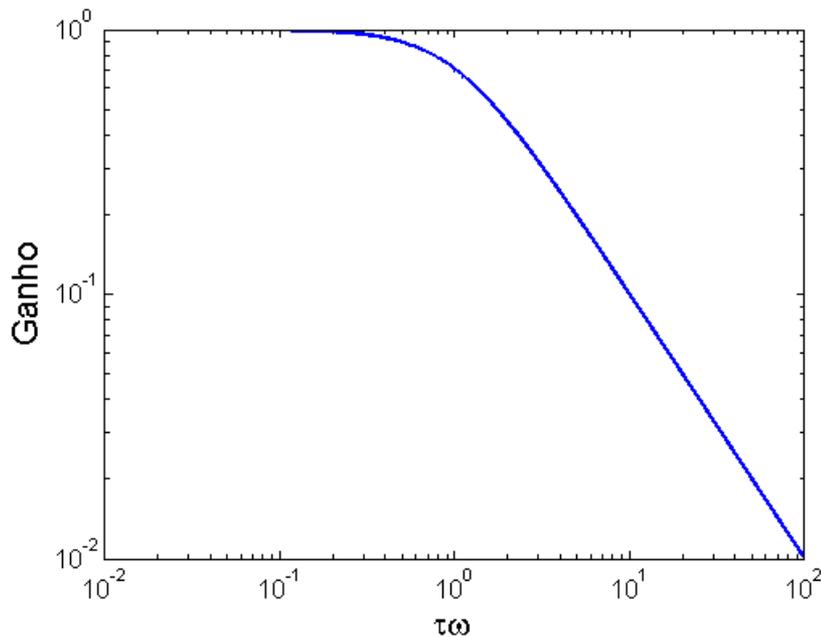
$$B(\tau\omega) = \frac{KA}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad \phi(\tau\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

- Analisando a leitura do instrumento em relação a perturbação periódica



SISTEMAS DE ORDEM 1

- Analisando a variação do ganho $G=B/KA$ e o atraso de fase com a frequência



- Um instrumento ideal deveria ter Ganho=1 e atraso de fase nulo. Isso só ocorre para baixas frequências. Logo, o instrumento só é adequado para utilização em frequências onde a resposta é próxima da ideal (Ganho > -3dB ou 0.707 vezes o valor original)

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Sensores com capacidade acumulativa/dissipativa e inércia também não são capazes de responder imediatamente a variações na entrada. Este tipo de sistema pode ser modelado usando uma equação diferencial de 2ª. ordem, da forma:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = f(t)$$

onde os coeficientes a_0, a_1, a_2 são parâmetros físicos usados para descrever o sistema. Para facilitar o entendimento do problema, a eq. é reescrita na forma:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y} + y = K \cdot f(t)$$

Onde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} ; \text{ frequência natural do sistema}$$

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} ; \text{ razão de amortecimento do sistema}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- A solução da EDO não homogênea é dada pela princípio da superposição → solução da EDO homogênea + solução particular

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

- A solução da EDO homogênea fica:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y} + y = 0$$

- A eq. possui coeficientes constantes. Assim a eq. característica fica:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \lambda^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \lambda + 1 = 0$$

- A solução dessa eq. fica: $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

- Dependendo do valor de ζ , três formas de solução são possíveis:

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Dependendo do valor de ζ , três formas de solução são possíveis:

- $\rho / \zeta > 1$ (sistema superamortecido):

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

- $\rho / \zeta = 1$ (sistema criticamente amortecido)

-

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$$

- $\rho / 0 < \zeta < 1$ (sistema subamortecido). Nesse caso as raízes contém parte real e imaginária $\lambda = \lambda_{\text{real}} + i\lambda_{\text{imag}}$, e a solução geral é da forma:

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_{\text{real}} t} \cos(\lambda_{\text{imag}} t) + C_2 e^{\lambda_{\text{real}} t} \text{sen}(\lambda_{\text{imag}} t)$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Resolvendo p/ o caso $0 < \zeta > 1$ (sistema subamortecido):

- Solução particular: $y_P(t) = KA$; $\dot{y}_P(t) = 0$; $\ddot{y}_P(t) = 0$;

- Logo $y(t)$ fica (particular +homogênea):

$$y(t) = KA + C_1 e^{\lambda_{real} t} \cos(\lambda_{imag} t) + C_2 e^{\lambda_{real} t} \text{sen}(\lambda_{imag} t)$$

- Assumindo as seguintes condições iniciais

$$(1) y(t=0) = 0; \quad (2) \dot{y}(t=0) = 0;$$

- Substituindo (1) na eq. de $y(t)$

$$0 = KA + C_1 e^{\lambda_{real} 0} \cos(\lambda_{imag} 0) + C_2 e^{\lambda_{real} 0} \text{sen}(\lambda_{imag} 0)$$

$$C_1 = -KA$$

- Substituindo (2) e C_1

$$C_2 = \frac{KA \lambda_{real}}{\lambda_{imag}}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Resolvendo p/ o caso $0 < \zeta > 1$ (sistema subamortecido):

- Logo $y(t)$ fica:

$$y(t) = KA - KAe^{\lambda_{real}t} \cos(\lambda_{imag}t) - \frac{KA\lambda_{real}}{\lambda_{imag}} e^{\lambda_{real}t} \text{sen}(\lambda_{imag}t)$$

-

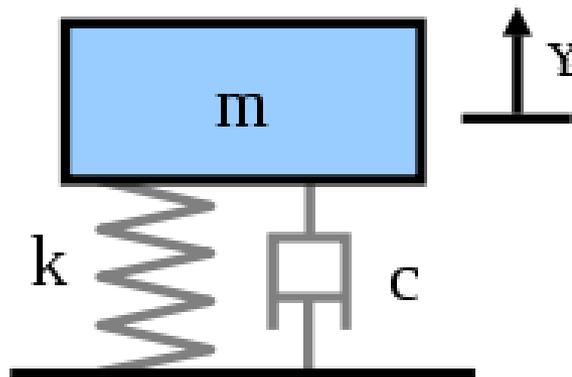
como

$$\lambda_{real} = -\zeta\omega_n; \quad \lambda_{imag} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$y(t) = KA - KAe^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right]$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Ex.: Acelerômetro



- Equação do sistema:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

- onde

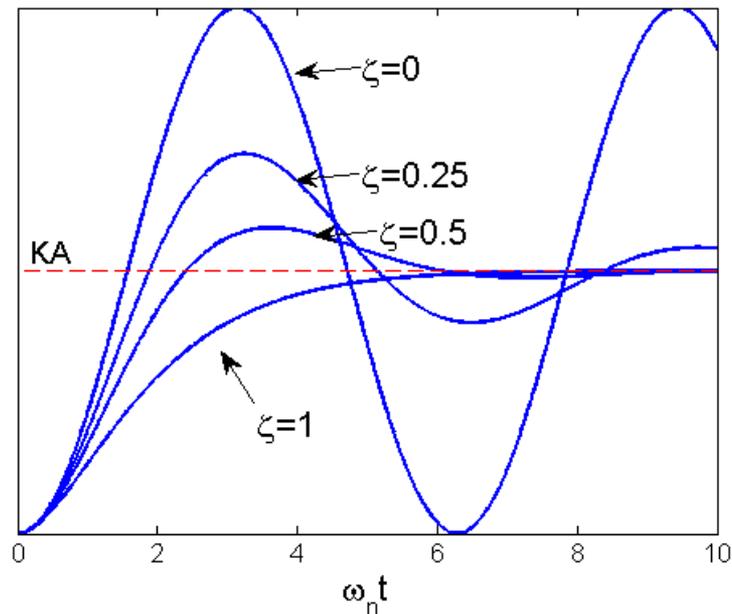
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Eq. idêntica ao caso geral!



SISTEMAS DE ORDEM 2

- Resposta a perturbação degrau $0 < \zeta > 1$ (sistema subamortecido):



- à medida que ζ diminui a resposta tende a oscilar antes de convergir para o resultado. Quando $\zeta=0$ não há convergência.
- O período de oscilação é o inverso de λ_{imag} , que é a frequência natural amortecida do instrumento.

SISTEMAS DE ORDEM 2

Avaliando comportamento a partir de uma perturbação do tipo senoidal.

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y} + y = K \cdot A \sin(\omega t)$$

Solução é dada pela eq. homogênea + solução particular.

$$y(t) = y_H + y_P$$

- Depois de algum esforço a obtém-se a solução particular da equação na forma:

- $$y_P = \frac{K A \sin \left[\omega t + \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right) \right]}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{2\zeta \omega}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{1/2}}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Para facilitar a análise vamos avaliar o sistema em regime permanente e reescrever a eq. em função de um termo de amplitude e outro de fase:

$$y_p = B(\omega)[\text{sen}(\omega t + \phi(\omega))]$$

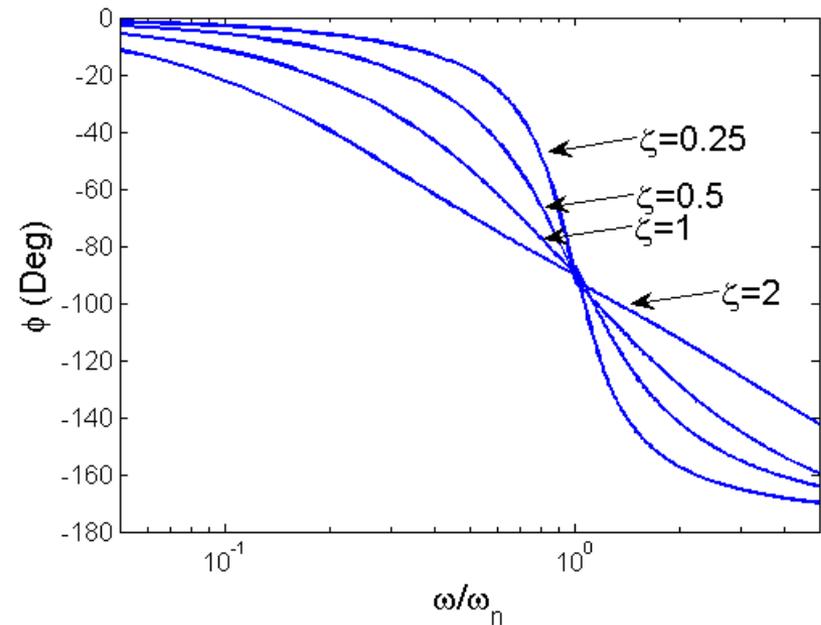
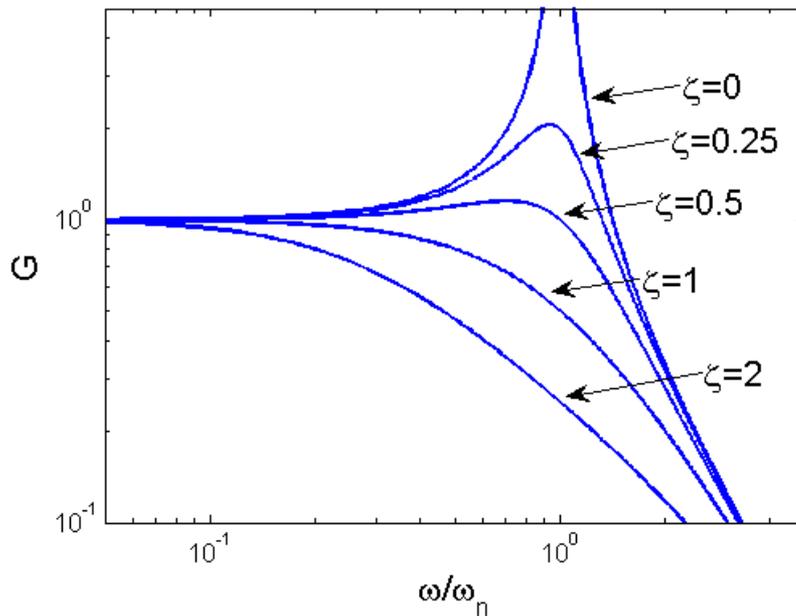
- Onde:

$$B(\omega) = \frac{KA}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right)$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

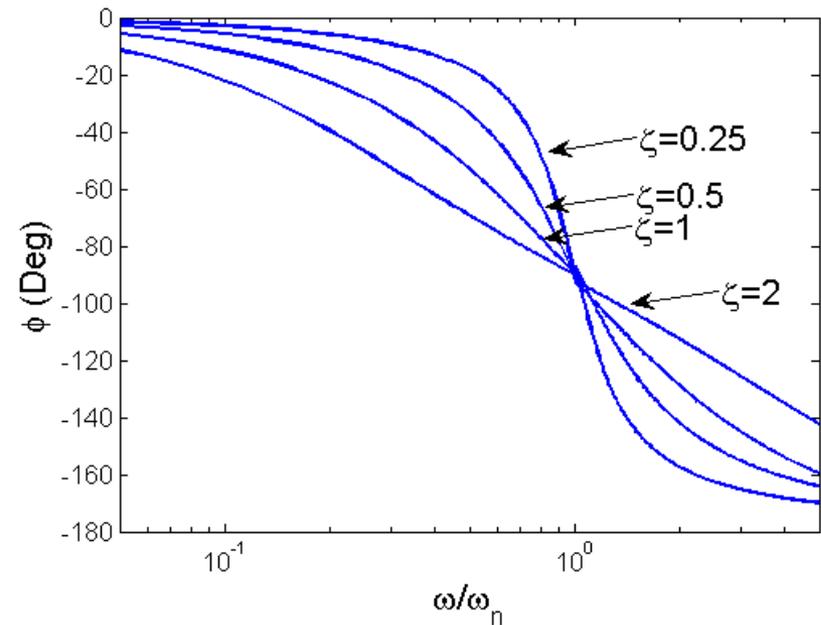
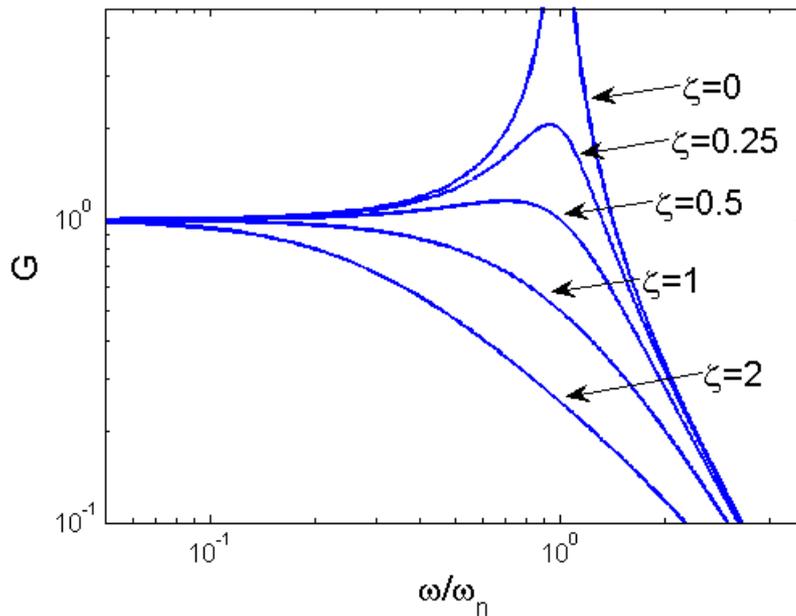
- Analisando a variação do ganho $G=B/KA$ e o atraso de fase com a frequência



- Somente para frequências de entrada bem baixas ($\omega \ll \omega_n$), $G \approx 1$ e $\phi \approx 0$ (instrumento ideal).
- Para frequências muito altas ($\omega \gg \omega_n$) M tende a zero.

SISTEMAS DE ORDEM 2

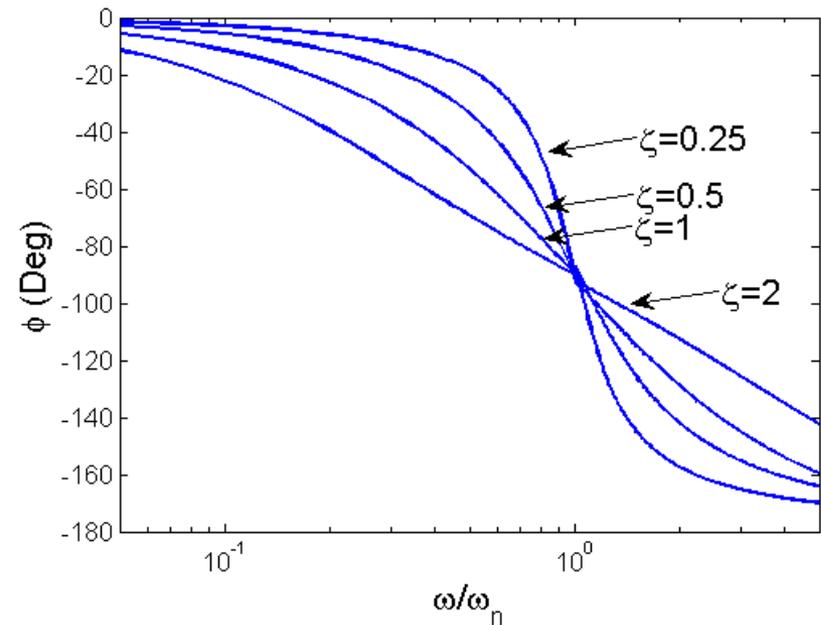
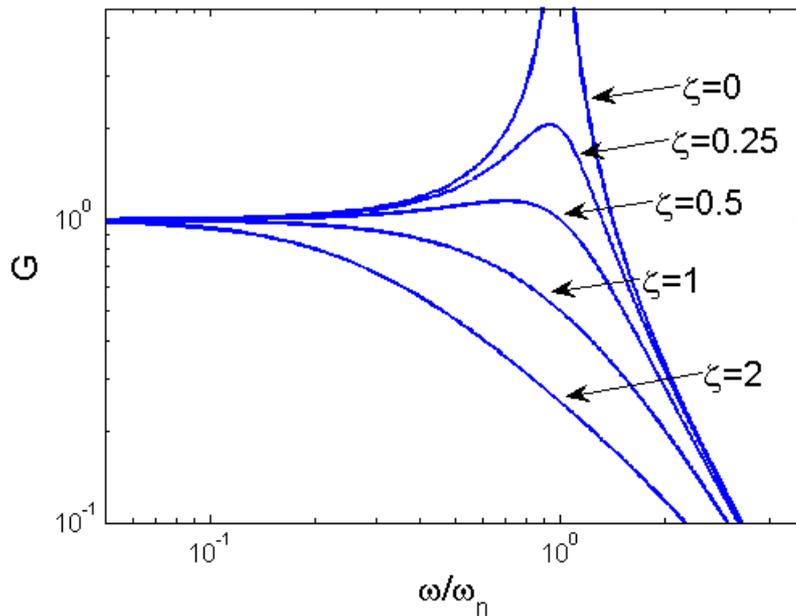
- Analisando a variação do ganho $G=B/KA$ e o atraso de fase com a frequência



- Para uma resposta adequada o fator de amortecimento deve ficar próximo (um pouco acima) de 0,5. Na figura vê-se que isto fornece uma resposta de amplitude razoavelmente constante na faixa $0 > \omega > \omega_n$.

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Analisando a variação do ganho $G=B/KA$ e o atraso de fase com a frequência



- A frequência natural do instrumento ω_n deve ser pelo menos de 5 a 10 vezes maior que a maior componente de frequência do sinal de entrada.