

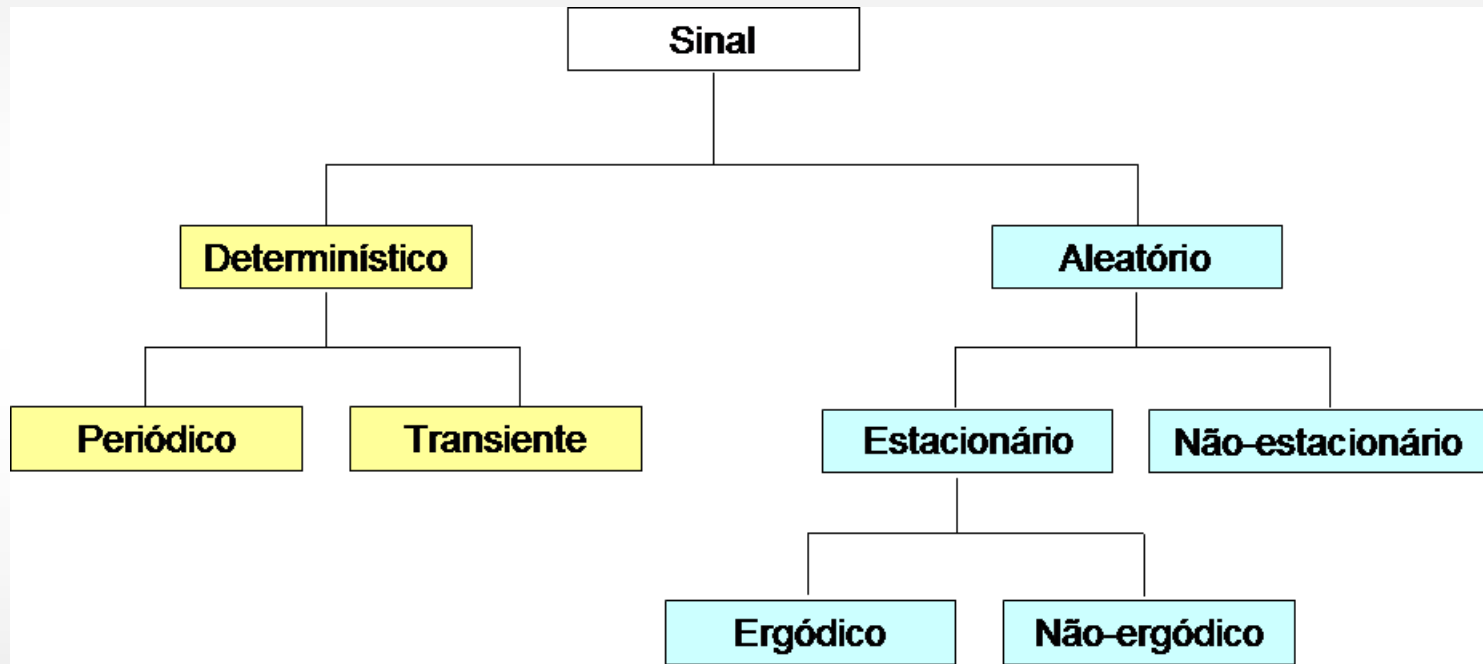
Aula de Medidas Dinâmicas

- *A medição é uma operação, ou conjunto de operações, destinadas a determinar o valor de uma grandeza física. O seu resultado, acompanhado da unidade conveniente, constitui a medida da grandeza.*
- O objetivo desta aula é apresentar técnicas e conceitos básicos de condicionamento e análise de sinais que são comumente empregados durante o processo de medição de grandezas físicas por meio de instrumentos.
- Para se aprofundar no tema o livro: *Random data: Analysis and Measurement Procedures*. Dos autores: J. S. Bendat; A. G. Piersol, é uma boa referência para estudo.

Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Tipos de sinal



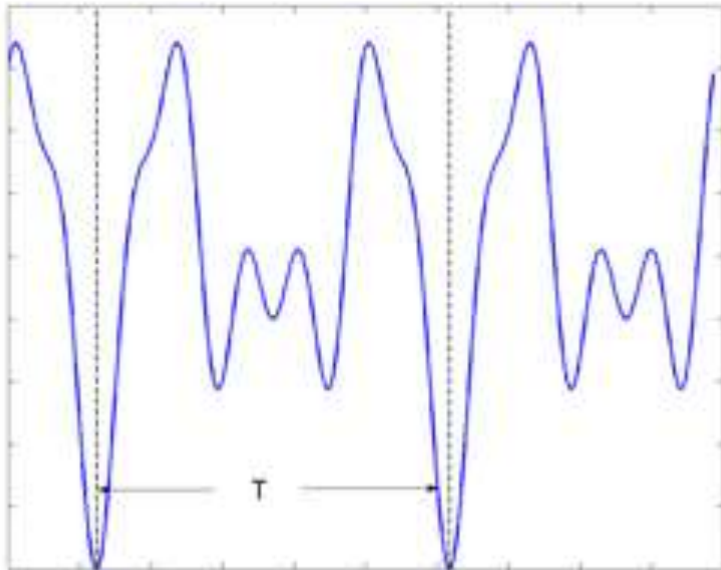
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

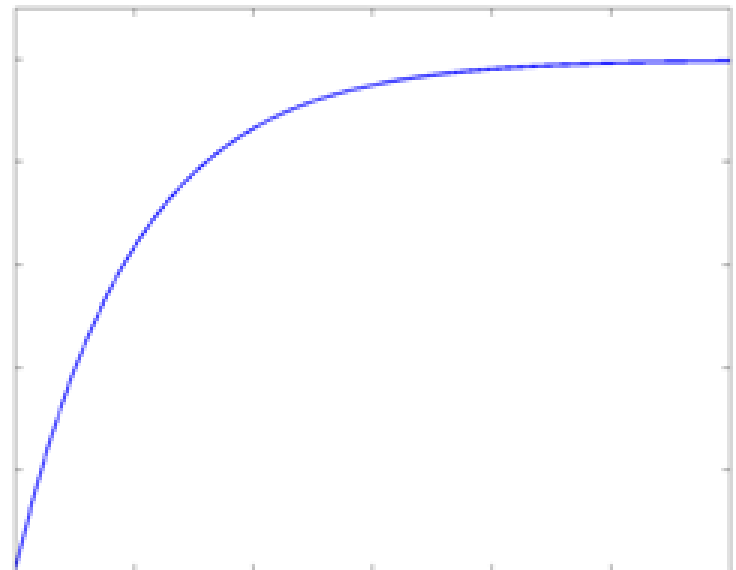
➤ Tipos de sinal:

➤ Determinístico: Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração.

Periódico



Transiente



Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Tipos de sinal:

➤ Determinístico: *Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração.*

Periódico. Ex:



Transiente. Ex:



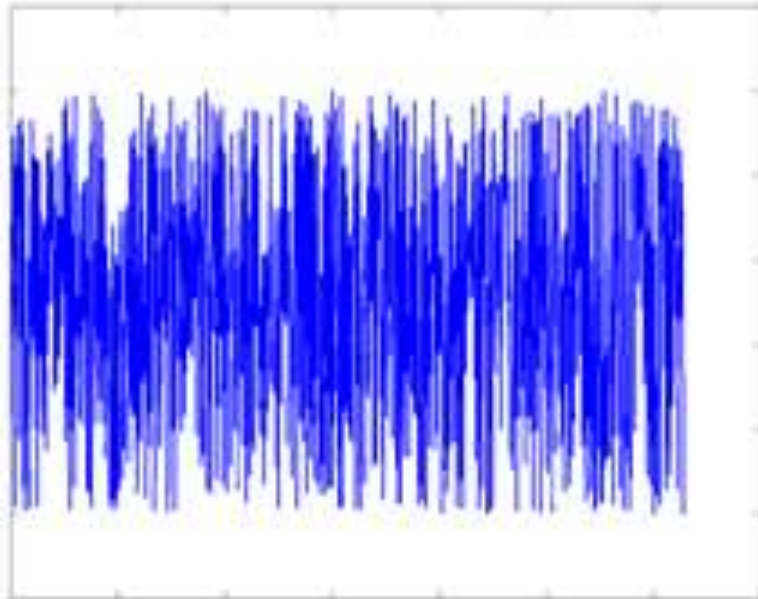
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

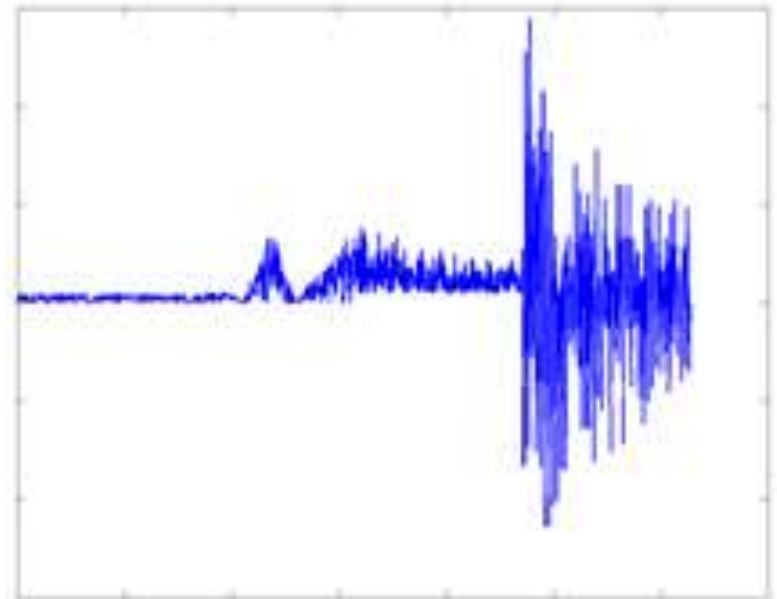
➤ Tipos de sinal:

➤ Estocástico (Aleatório): *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário



Não Estacionário



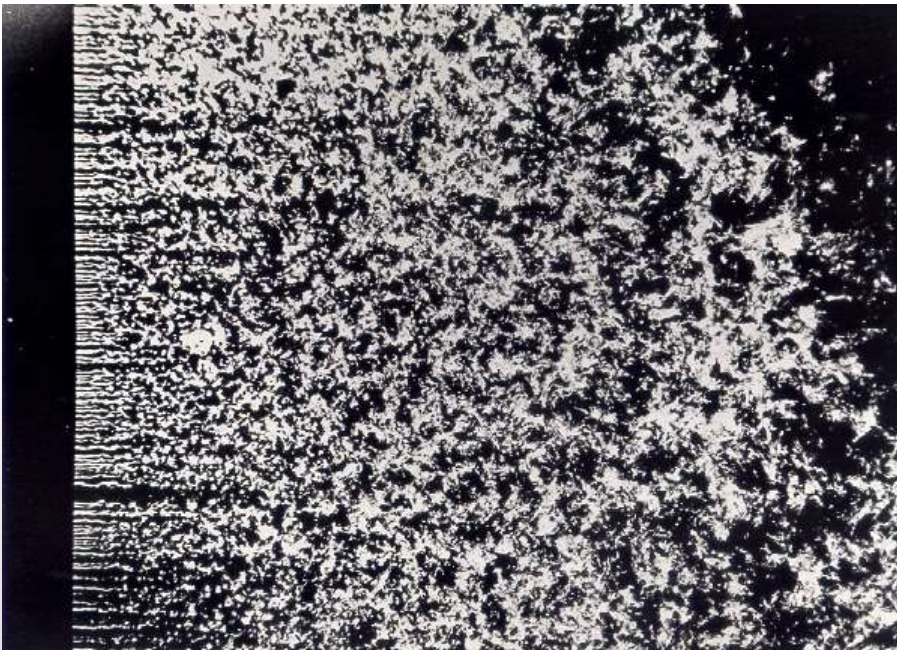
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

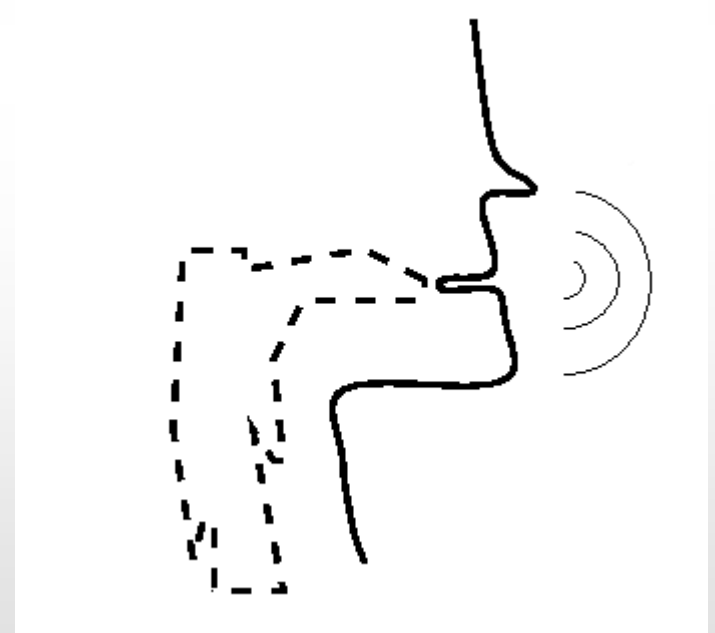
➤ Tipos de sinal:

➤ Estocástico (Aleatório): *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário. Ex:



Não Estacionário. Ex:



Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Tipos de sinal:

➤ Estocástico (Aleatório):

Estacionário ergódico: *propriedades estatísticas não dependem do tamanho da amostra, ou seja as médias temporais e as médias de eventos são iguais.*

Estacionário não ergódico: *somente estatísticas de ordem mais elevada apresentam invariância no tempo.*

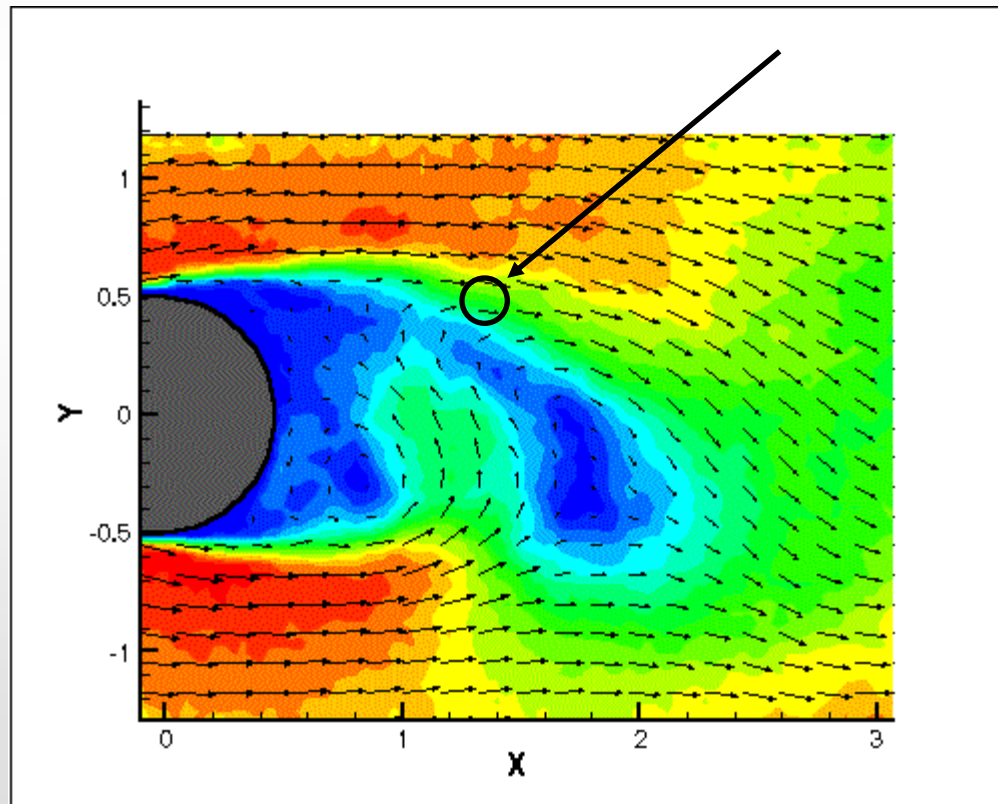
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ **Análise de Sinais (introdução):**

➤ Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➤ Exemplo: Escoamento na esteira de um cilindro



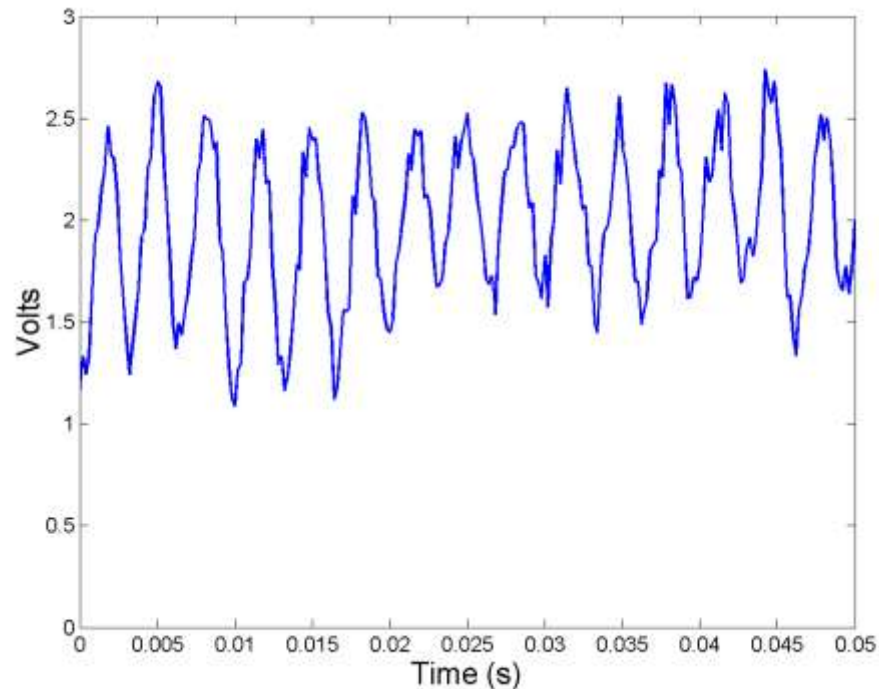
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➤ Exemplo: Escoamento na esteira de um cilindro.
Série temporal de 1 ponto no espaço medido com anemômetro a quente



Aula de Medidas Dinâmicas

➤ **Análise de Sinais (introdução):**

➤ Medidas de amplitude (Distribuição Normal):

➤ **Componente média (DC)**

Valor médio

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N x_j$$

➤ **Período de integração**

➤ **Componente alternada (AC)**

Vários estimadores

Ex.: desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (x_j - \mu)^2}$$

Não dá informação sobre características do sinal

Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

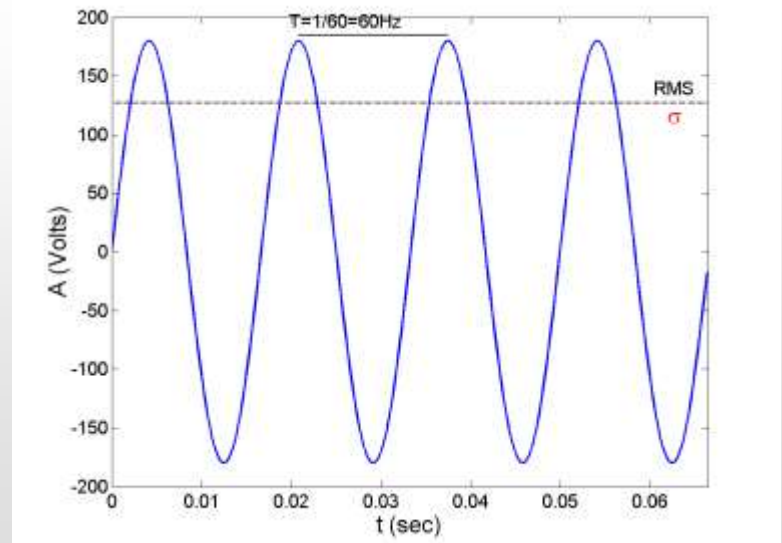
➤ Medidas de amplitude:

➤ Em eletrônica os sinais são geralmente definidos em termos de seu valor RMS.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (x_j)^2}$$

➤ Sinais sem componente média tem os valores RMS e de desvio padrão iguais.

➤ Ex: Tensão da rede
 $V_{pp}=2*180V$
 $V_{rms}=127V$

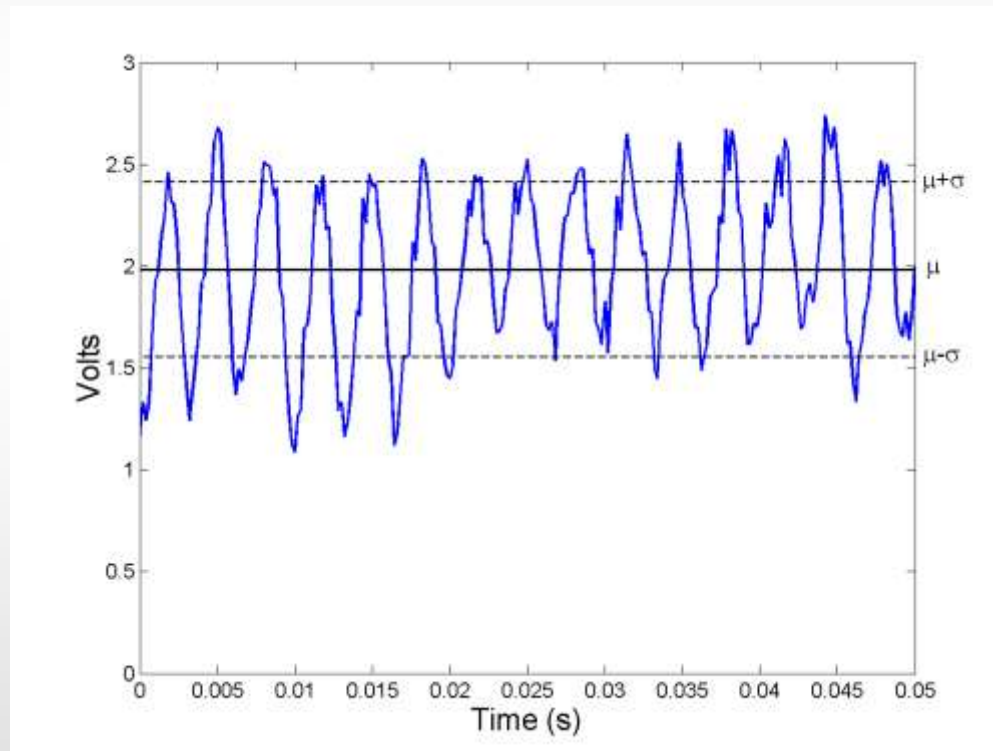


Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

- Exemplo: Escoamento na esteira de um cilindro.
Série temporal de 1 ponto no espaço medido com anemômetro de fio quente.

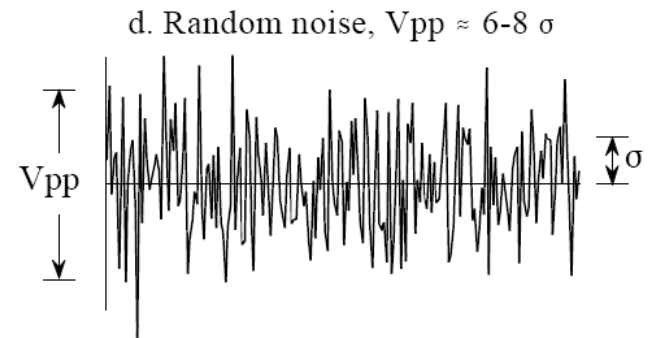
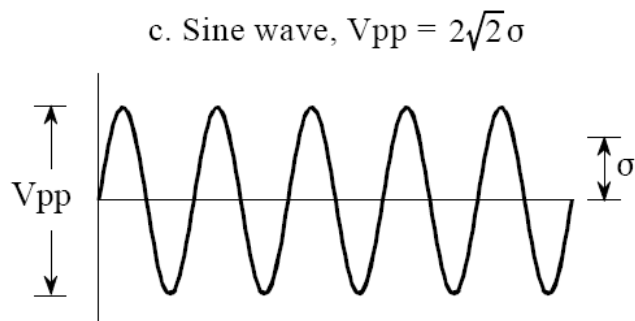
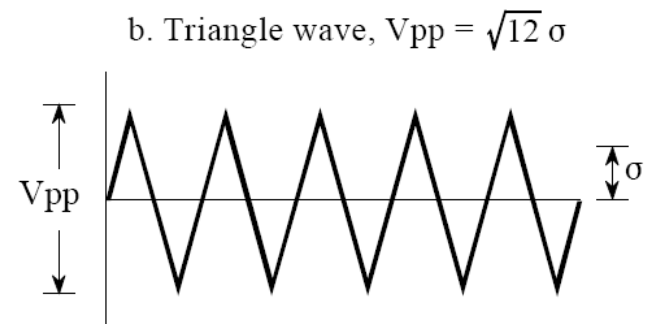
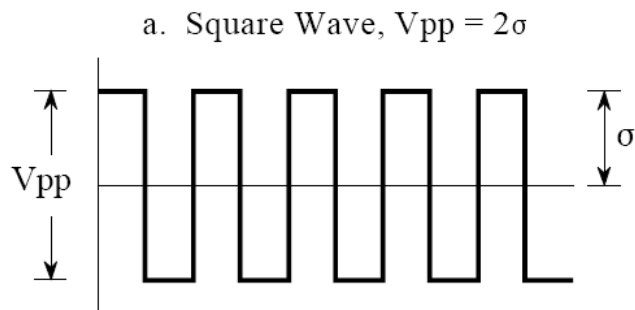


Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Exemplo: Diferentes formas de onda



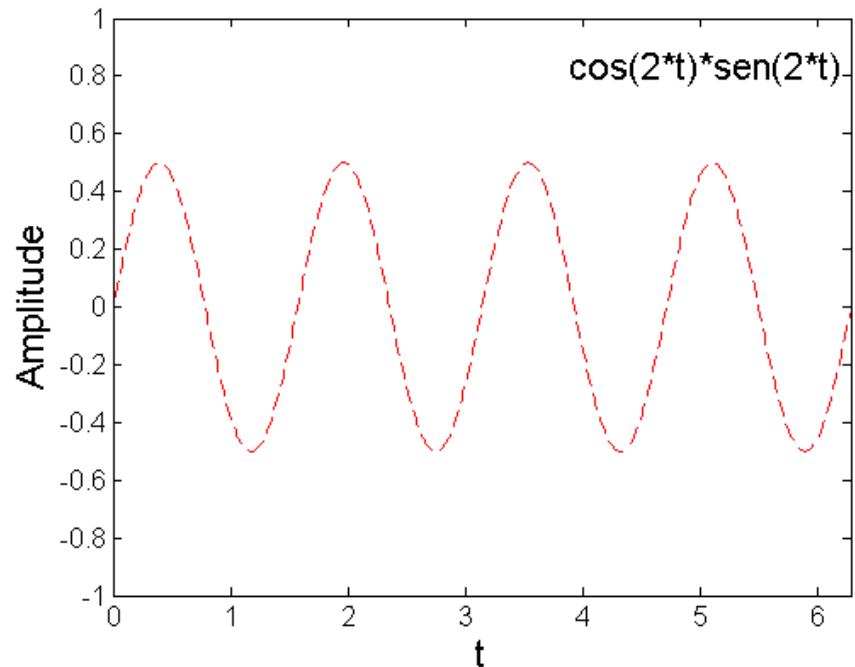
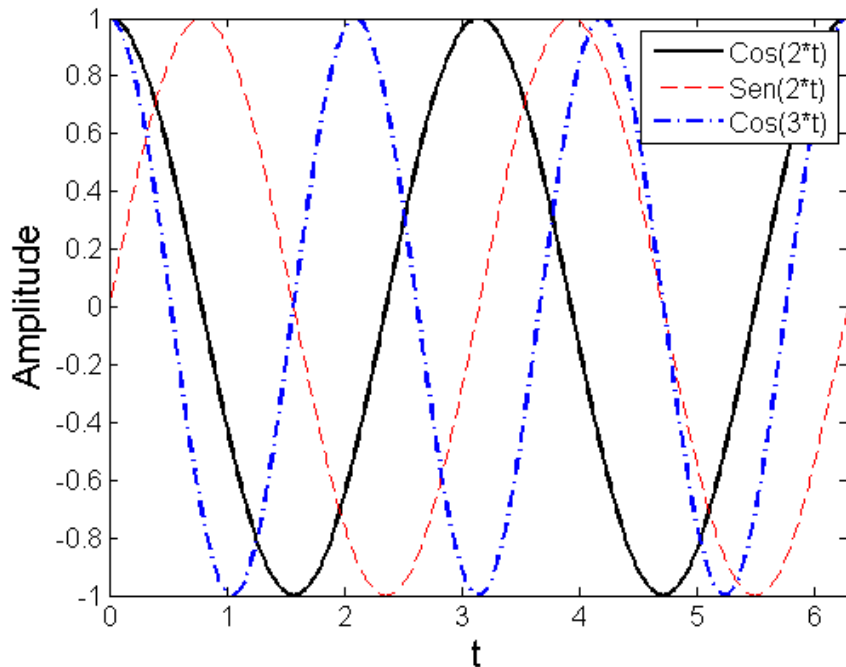
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{j=1}^N \frac{(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_j)}{N}$$



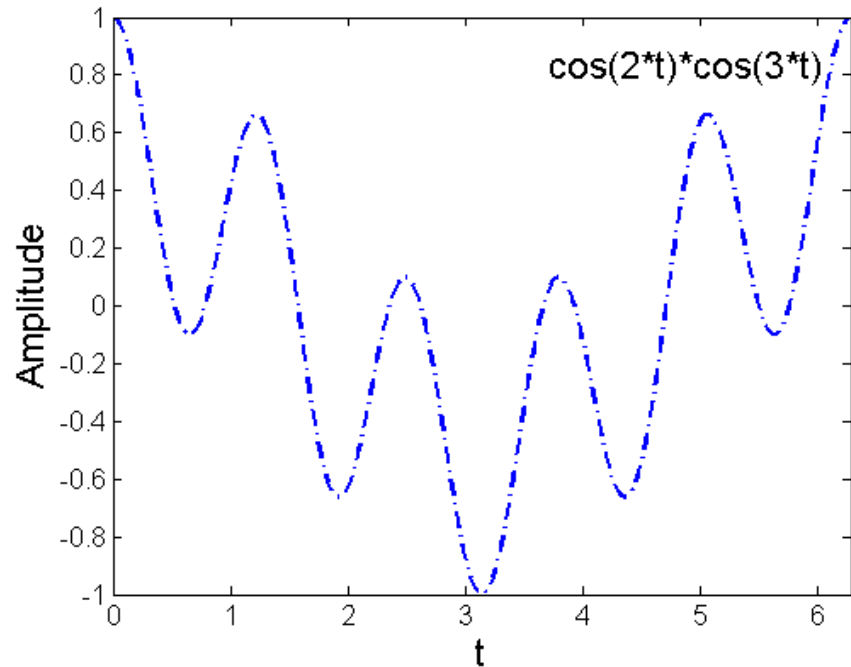
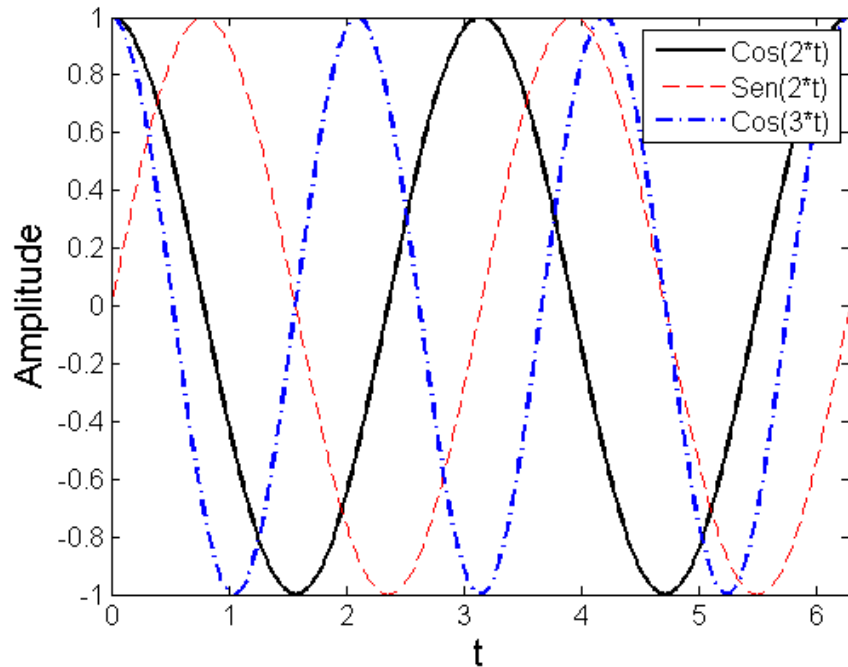
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{j=1}^N \frac{(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_j)}{N}$$



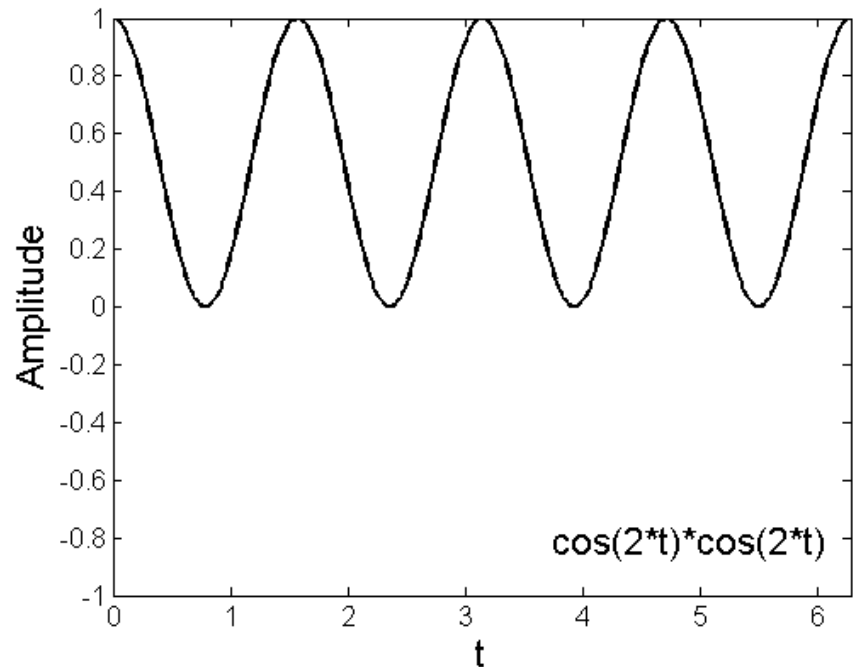
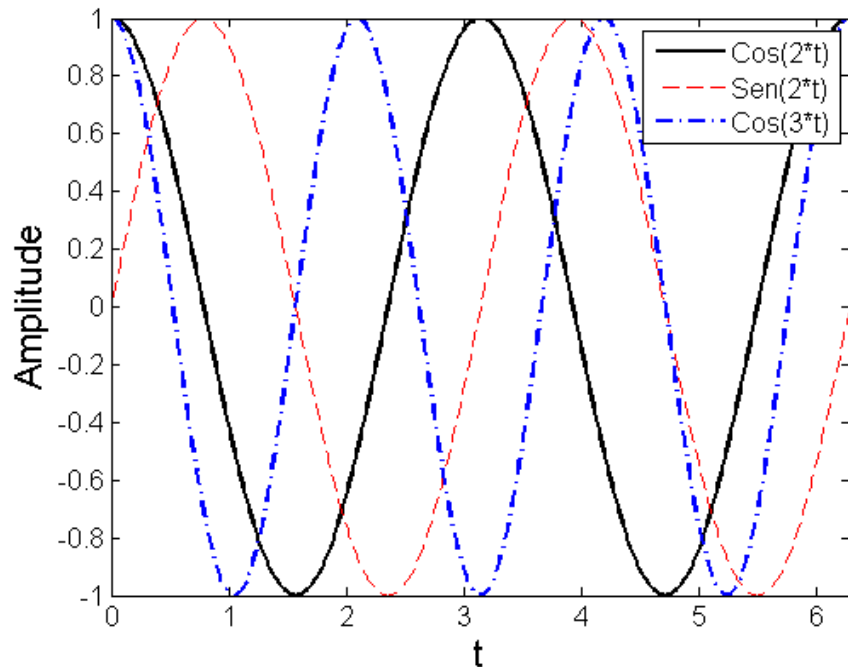
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{j=1}^N \frac{(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_j)}{N}$$



A covariância nesse exemplo só é diferente de 0 para o caso de $\cos(2*t)*\cos(2*t)$

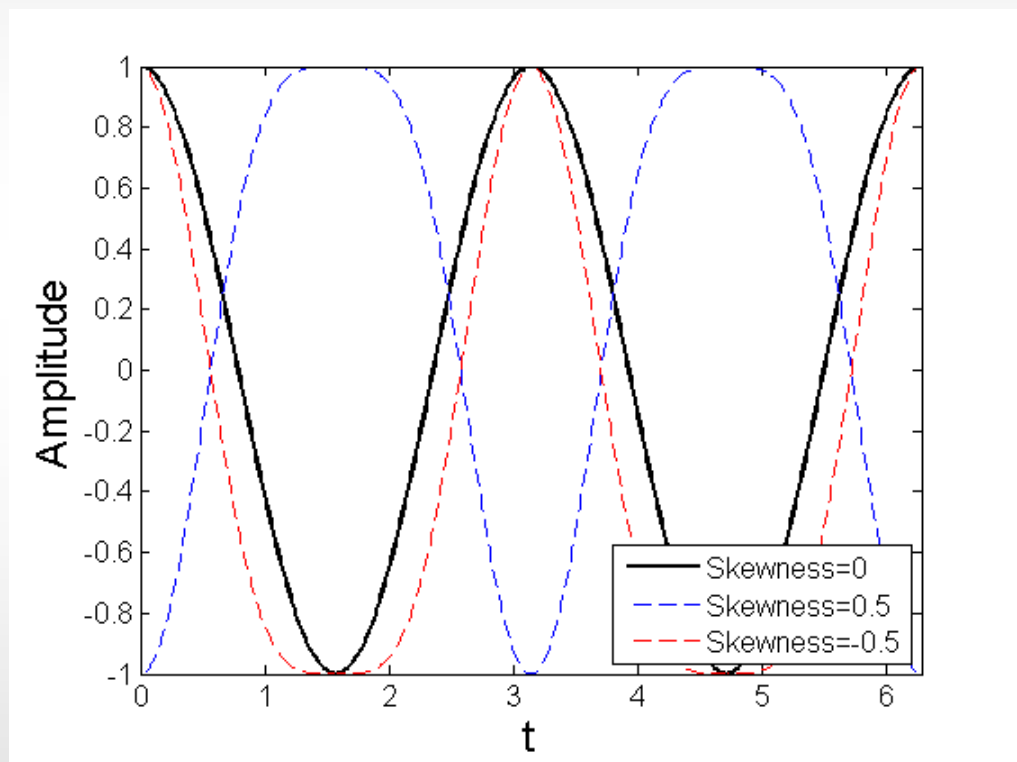
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Coeficiente de assimetria (*skewness*).

$$skewness = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \mu_X)^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \mu_X)^2} \right)^3}$$



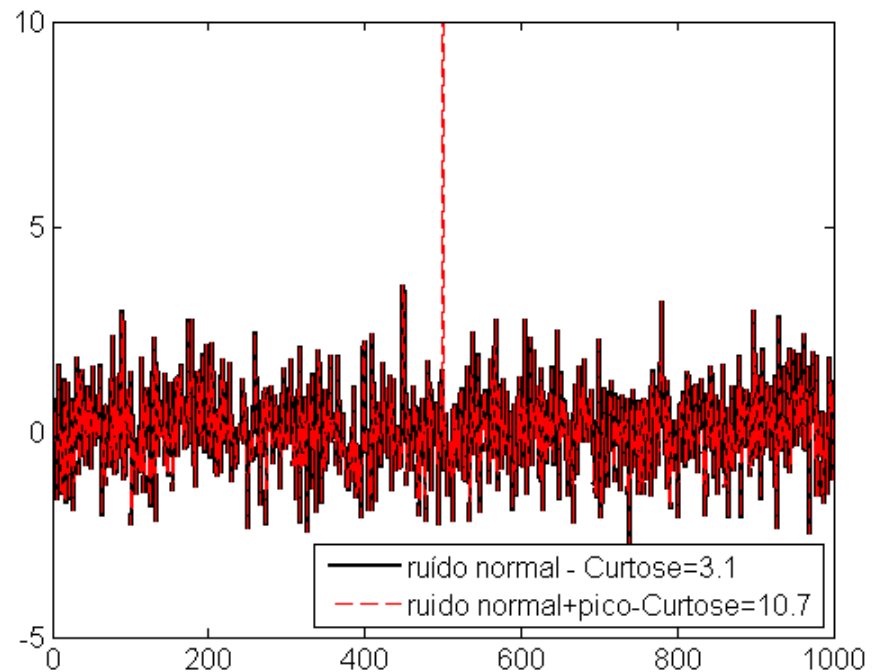
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Curtose (medida de forma distribuição de probabilidades).

$$Curtose = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \mu_X)^4}{\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \mu_X)^2 \right)^2}$$



➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Razão entre sinal de interesse e ruído (*signal to noise ratio* – *SNR*).

$$SNR = \frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}} = \left(\frac{A_{RMS\text{sinal}}}{A_{RMS\text{ruído}}} \right)^2$$

➤ No caso onde o sinal de interesse é a média, uma definição alternativa pode ser utilizada.

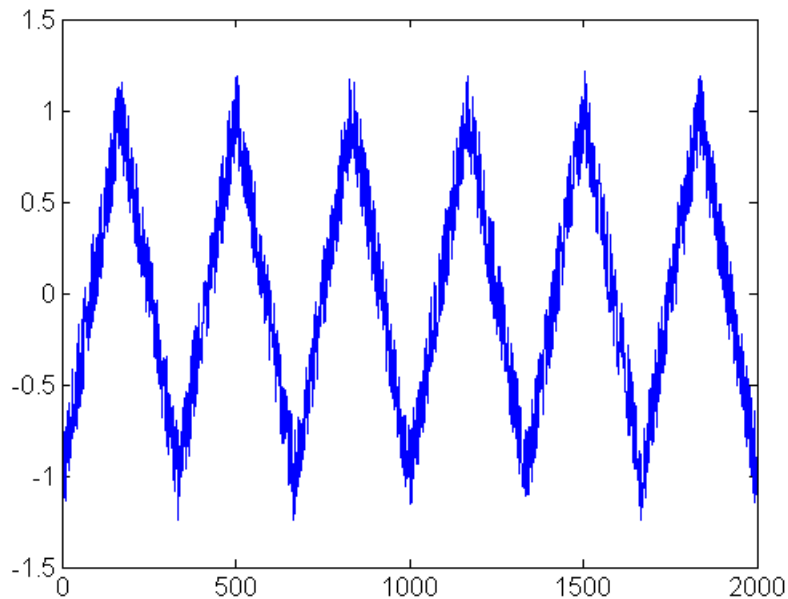
$$SNR = \frac{\mu}{\sigma}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

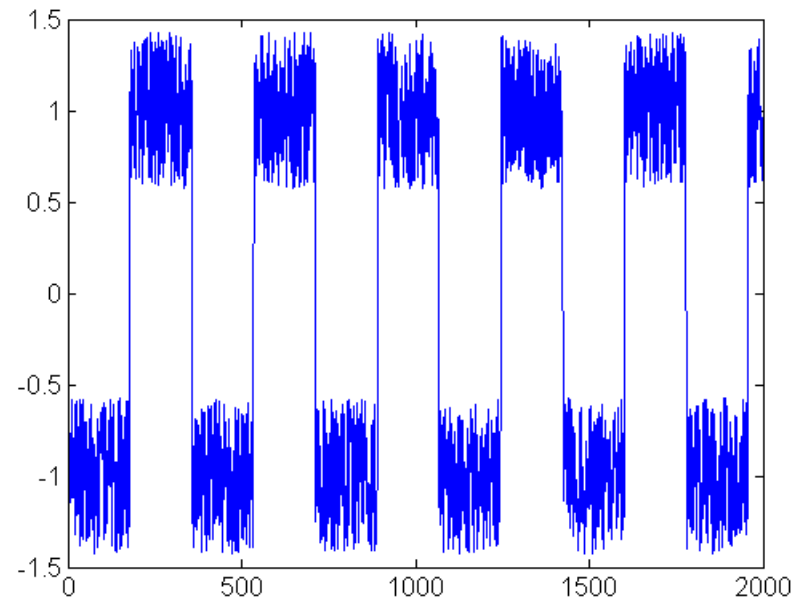
I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Razão entre sinal de interesse e ruído. Qual tem maior?



SNR=4.03



SNR=4.06

Aula de Medidas Dinâmicas

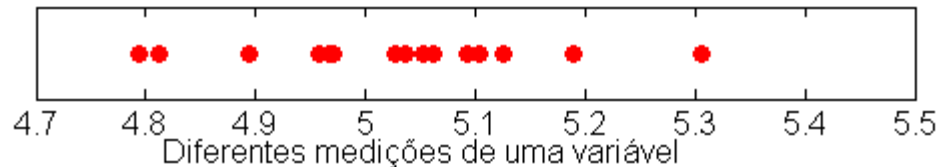
➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

-É a frequência em que uma variável medida adquire um valor ou uma faixa de valores.

Ex.: Medição de uma variável qualquer

Nº Medição	Valor Medido
1	5.3054
2	5.0934
3	4.9581
4	5.125
5	5.0366
6	4.794
7	5.1898
8	5.0614
9	5.027
10	5.103
11	5.0523
12	4.8117
13	4.9675
14	4.9708
15	4.8936



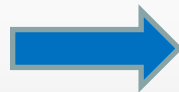
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

Organizando os dados em intervalos de ocorrência das medidas temos: (o número de intervalos pode ser estimado usando a relação $n_{\text{intervalos}} = 1.87 \cdot (N - 1)^{0.4} + 1$)

Nº Medição	Valor Medido
1	5.3054
2	5.0934
3	4.9581
4	5.125
5	5.0366
6	4.794
7	5.1898
8	5.0614
9	5.027
10	5.103
11	5.0523
12	4.8117
13	4.9675
14	4.9708
15	4.8936



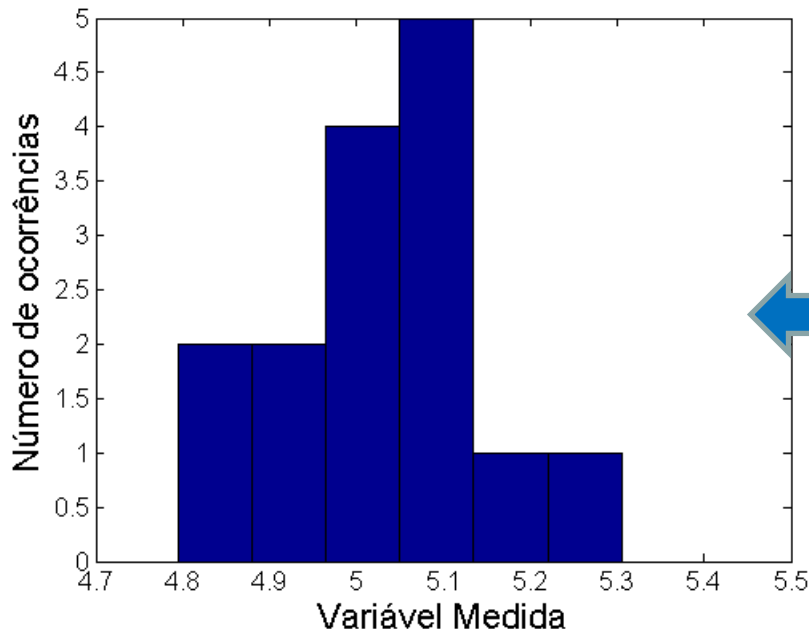
Nº Intervalo	Intervalo	nº ocorrências	nº ocorrências/N f(n _i)
1	4.8 ≤ x _i < 4.885	2	0.13
2	4.885 ≤ x _i < 4.97	2	0.13
3	4.97 ≤ x _i < 5.055	4	0.27
4	5.055 ≤ x _i < 5.14	5	0.33
5	5.14 ≤ x _i < 5.225	1	0.07
6	5.225 ≤ x _i < 5.31	1	0.07

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

Organizando os dados em intervalos de ocorrência das medidas temos: (o número de intervalos pode ser estimado usando a relação $n_{\text{intervalos}} = 1.87 \cdot (N - 1)^{0.4} + 1$)



Nº Intervalo	Intervalo	nº ocorrências	nº ocorrências/N f(n _i)
1	4.8 ≤ x _i < 4.885	2	0.13
2	4.885 ≤ x _i < 4.97	2	0.13
3	4.97 ≤ x _i < 5.055	4	0.27
4	5.055 ≤ x _i < 5.14	5	0.33
5	5.14 ≤ x _i < 5.225	1	0.07
6	5.225 ≤ x _i < 5.31	1	0.07

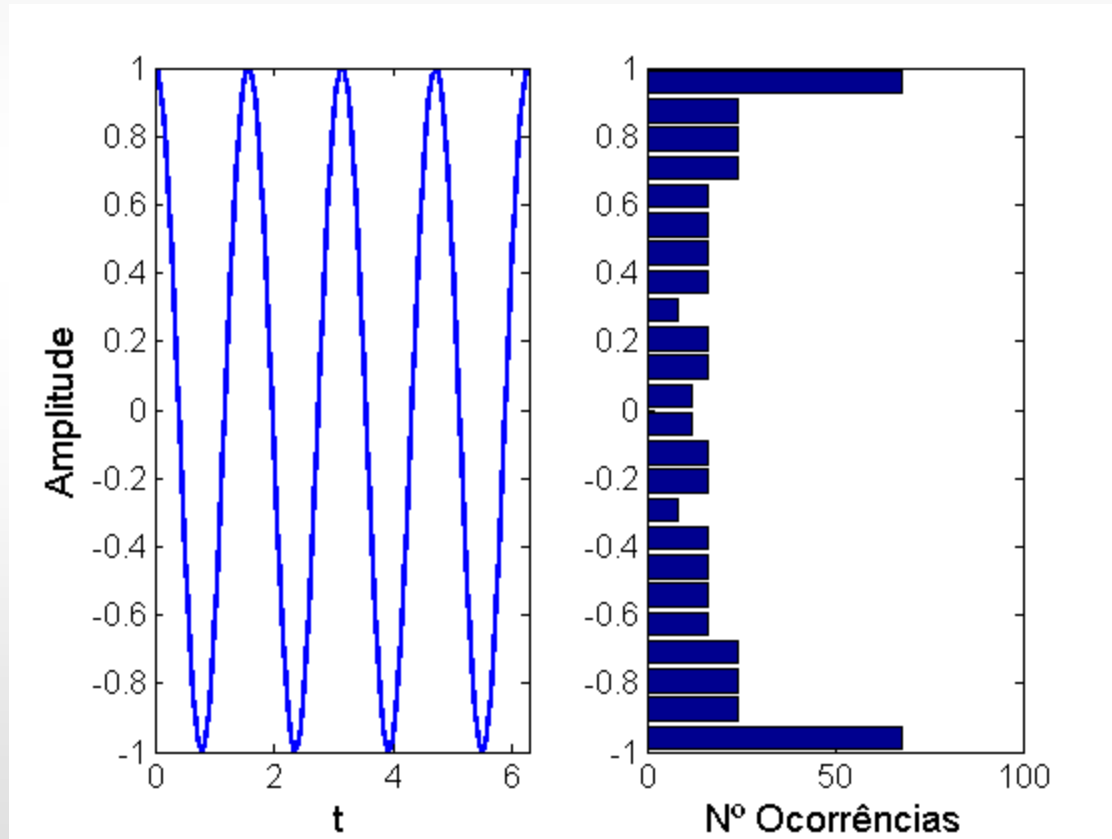
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: $\cos(4*t)$



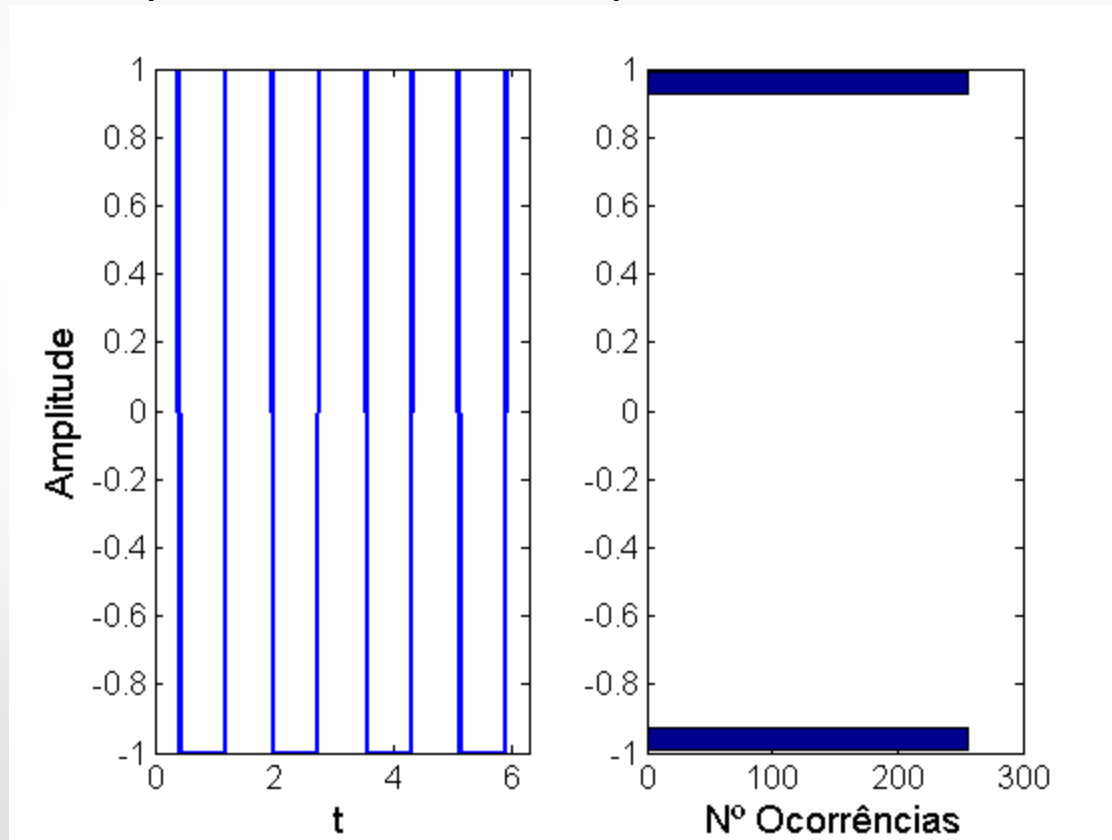
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: Onda quadrada



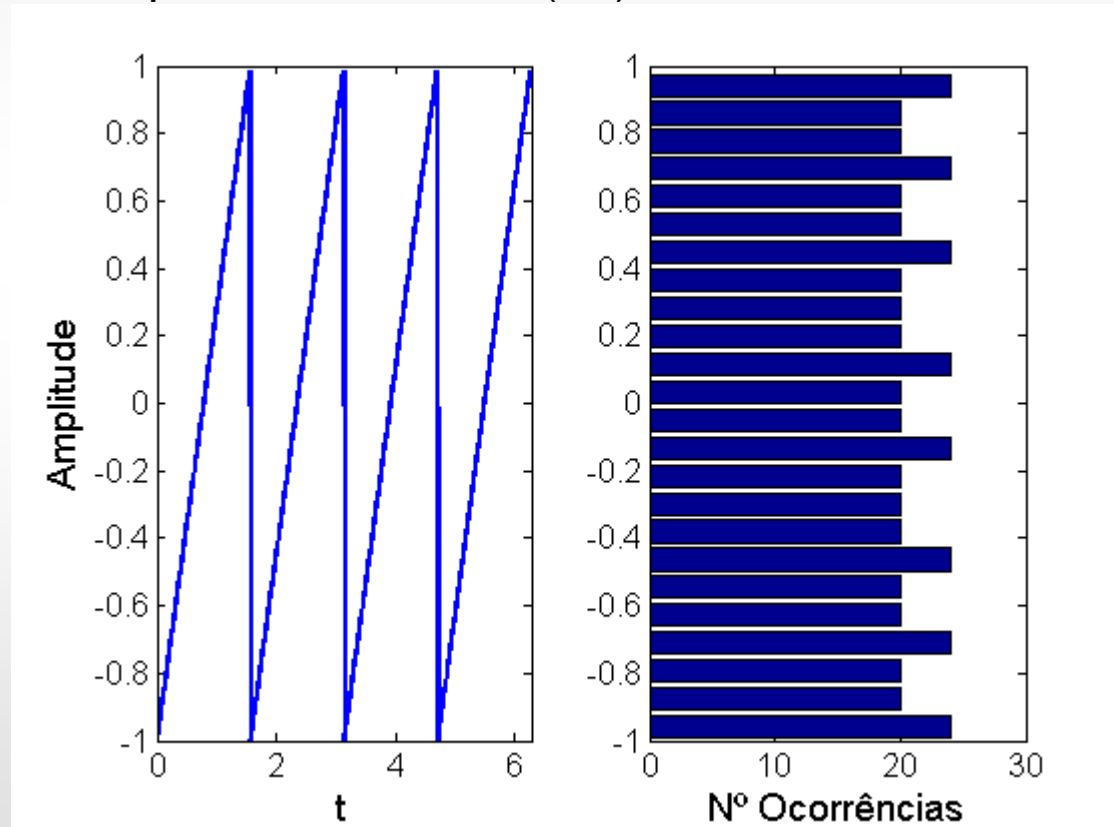
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: $\cos(4*t)$



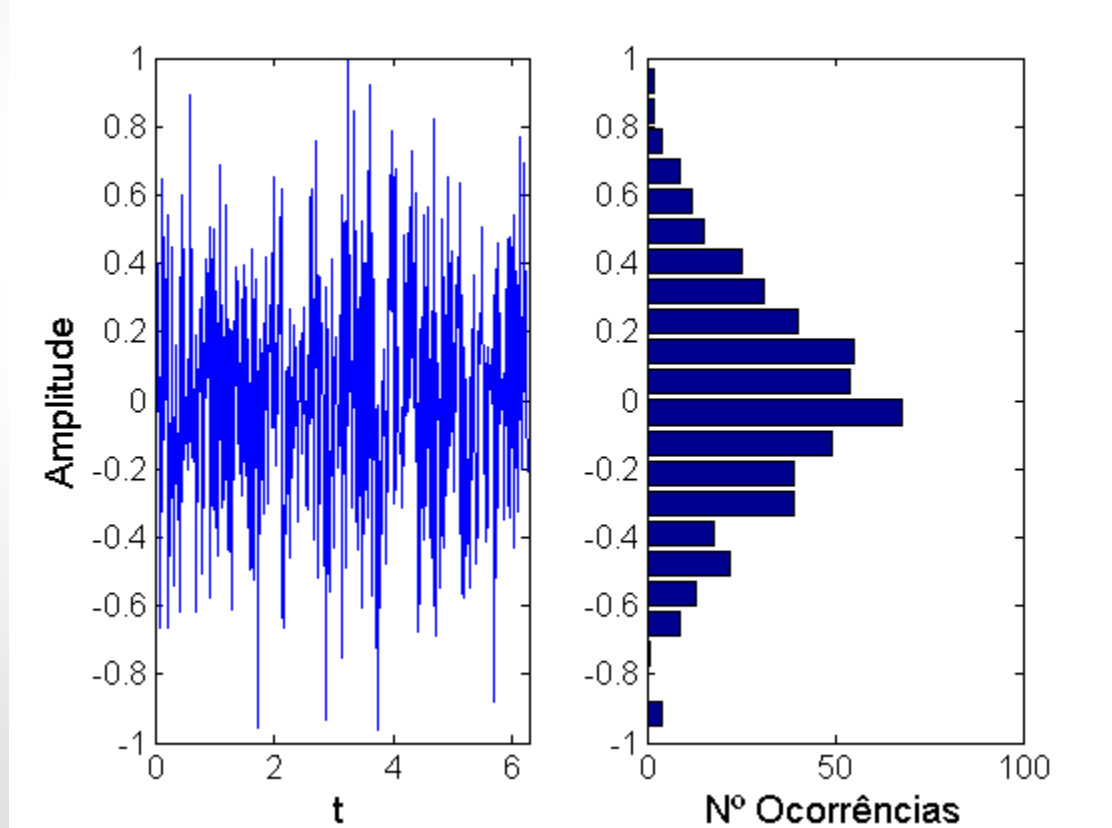
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: ruído normal (gaussiano)



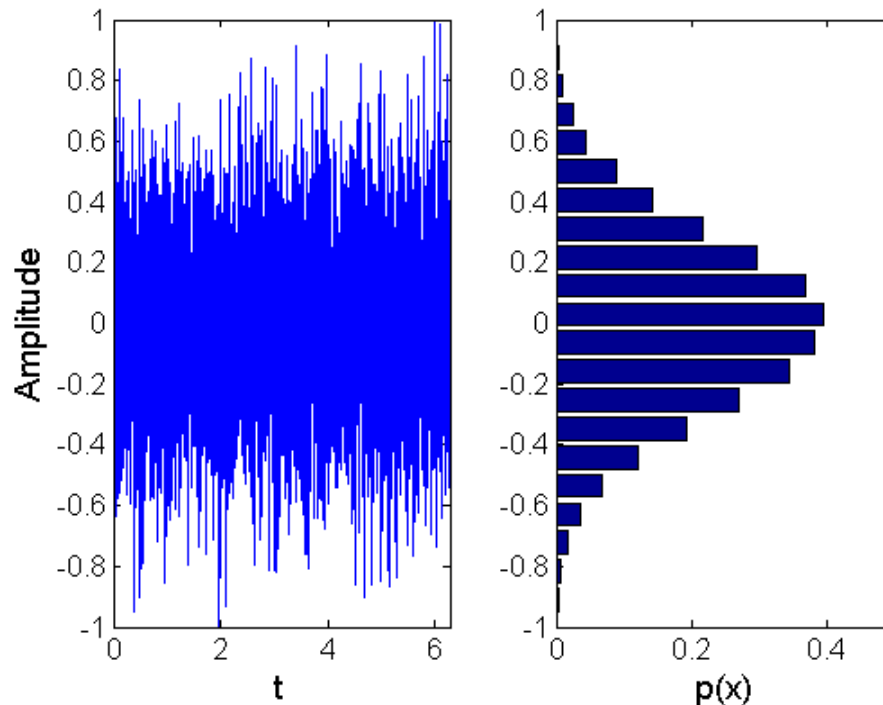
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty, \delta x \rightarrow 0} \frac{n_{\text{ocorrências}}}{N(2\delta x)}$$



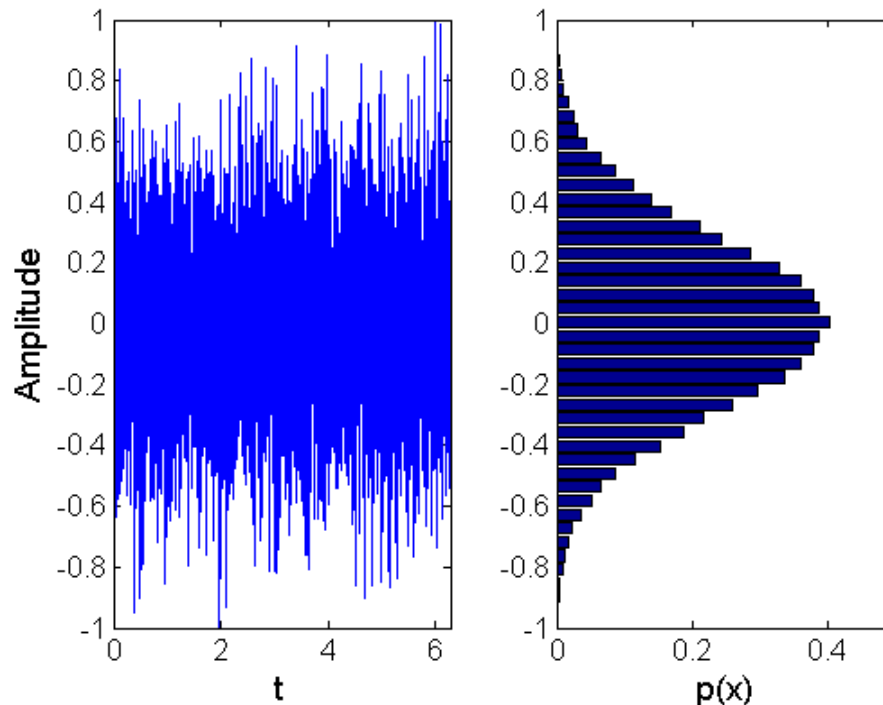
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty, \delta x \rightarrow 0} \frac{n_{\text{ocorrências}}}{N(2\delta x)}$$



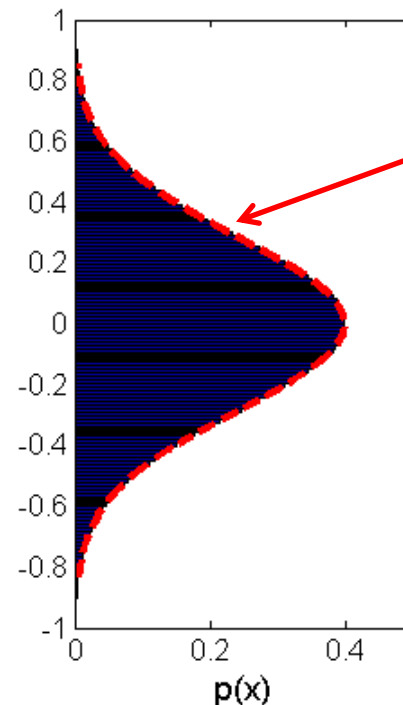
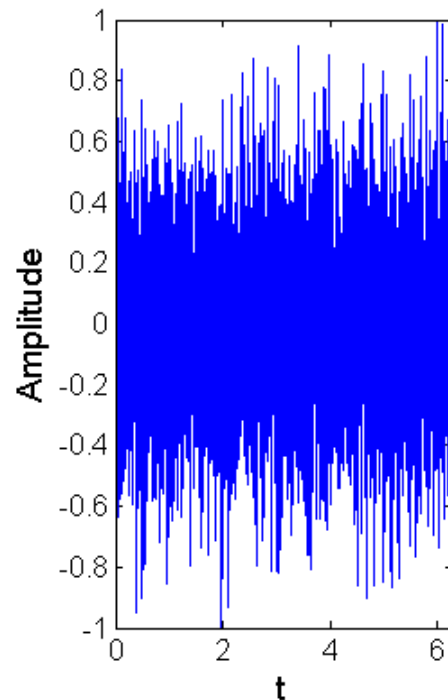
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty, \delta x \rightarrow 0} \frac{n_{\text{ocorrências}}}{N(2\delta x)}$$



Distribuição Normal ou gaussiana

Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Aproximação polinomial de ordem m dos dados:

$$f(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots a_mx^m$$

A relação polinomial deve ser encontrada para um conjunto de N pontos de dados [da forma (x_i, y_i)].

Dedução para eq. do 1º grau:

$$f(x) = y = a_0 + a_1x$$

onde y é o resultado da equação de ajuste e a_0 e a_1 são, respectivamente, os coeficientes linear e angular.

O desvio do ajuste pode ser dado por:

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

onde Y_i é um dos pontos medidos e y_i o ponto fornecido pelo ajuste

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

O objetivo é obter coeficientes que minimizem a soma dos erro quadrados, de modo que:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - y)^2 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - a_1 x - a_0)^2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i^2 - 2Y_i a_1 x - 2Y_i a_0 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x a_0 + a_0^2) = 0$$

$$= 2 \sum (Y_i - a_1 x - a_0)(-x) = 0$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

O objetivo é obter coeficientes que minimizem a soma dos erro quadrados, de modo que:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i - y)^2 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i - a_1 x - a_0)^2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i^2 - 2Y_i a_1 x - 2Y_i a_0 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x a_0 + a_0^2) = 0$$

$$= 2 \sum (Y_i - a_1 x - a_0)(-1) = 0$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Resolvendo para a_0 :

$$\sum Y_i - a_1 \sum x - na_0 = 0$$

$$a_0 = \frac{\sum Y_i - a_1 \sum x}{n}$$

E substituindo para encontrar a_1 :

$$\sum Y_i x - a_1 \sum x^2 - a_0 \sum x = 0$$

$$\sum Y_i x - a_1 \sum x^2 - \frac{(\sum Y_i - a_1 \sum x)}{n} \sum x = 0$$

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \sum x - n \sum Y_i x}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Erro padrão do ajuste (1ª ordem):

$$S = \sqrt{\frac{\Delta^2}{N-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - y)^2}{N-1}}$$

A partir do erro padrão é possível estimar um intervalo de confiança para os dados em torno do ajuste

$$\pm t_{N-1,P} \frac{S}{\sqrt{N}} (\% P)$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Onde o expoente T se refere a transposta da matriz e -1 a inversa, com as matrizes x, y e a sendo :

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$x^T x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix}$$

$$x^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$(x^T x)^{-1} = \frac{1}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix}$$

Substituindo:

$$(x^T x)^{-1} x^T y = \frac{1}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

$$(x^T x)^{-1} x^T y = \frac{1}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy \\ -\sum x \sum y + n \sum xy \end{bmatrix}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$(x^T x)^{-1} x^T y = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy \\ - \sum x \sum y + n \sum xy \end{bmatrix}$$

Equação encontrada anteriormente:

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \sum x - n \sum Y_i x}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Polinômios de mais alta ordem também podem ser ajustados usando essa operação:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Só que nesses casos as matrizes ficam:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Regressões de múltiplas variáveis também podem ser obtidas

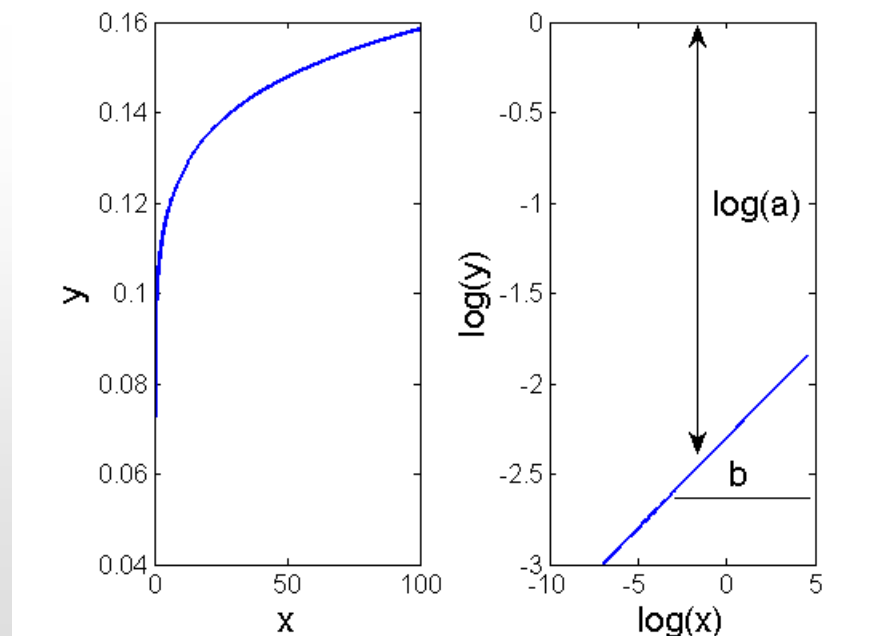
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = ax^b$



Aula de Medidas Dinâmicas

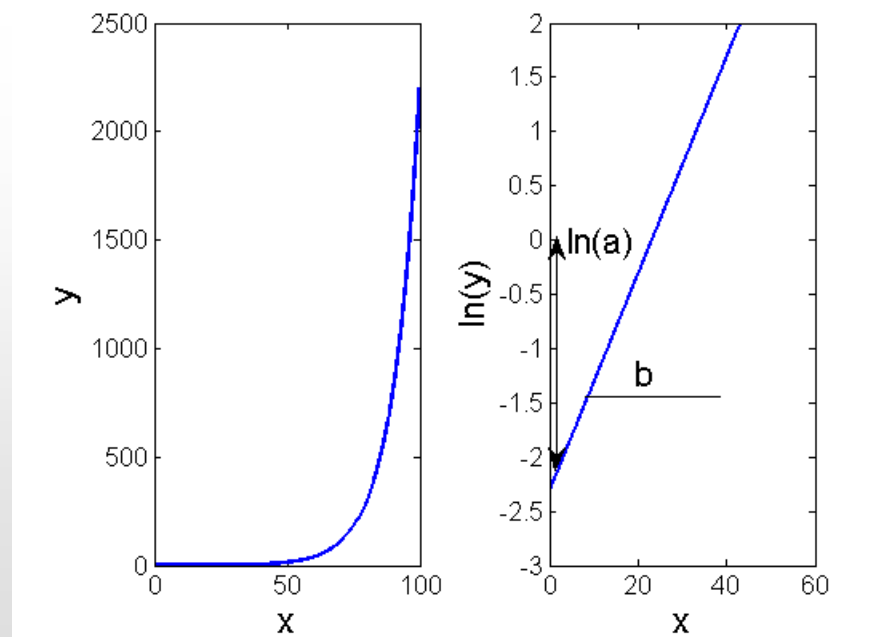
I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = ae^{bx}$



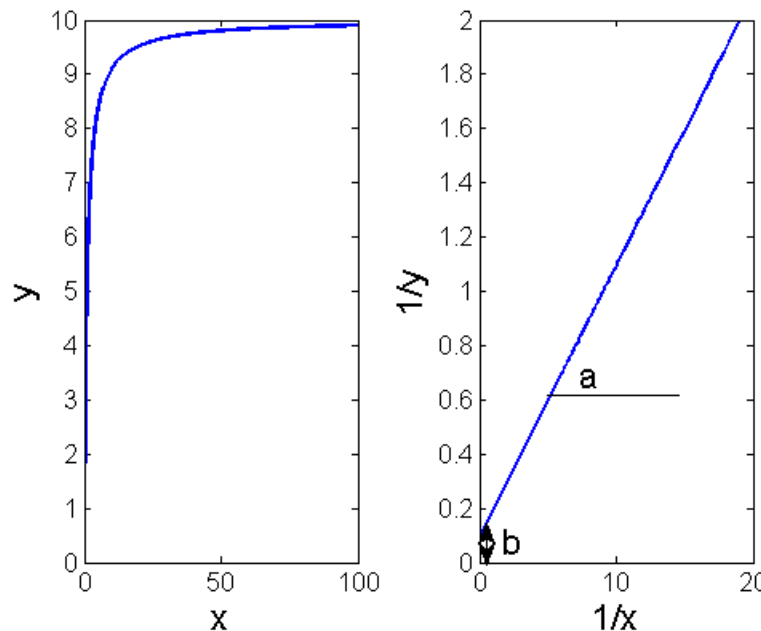
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

$$\text{Ex.: } y = \frac{x}{a + bx}$$



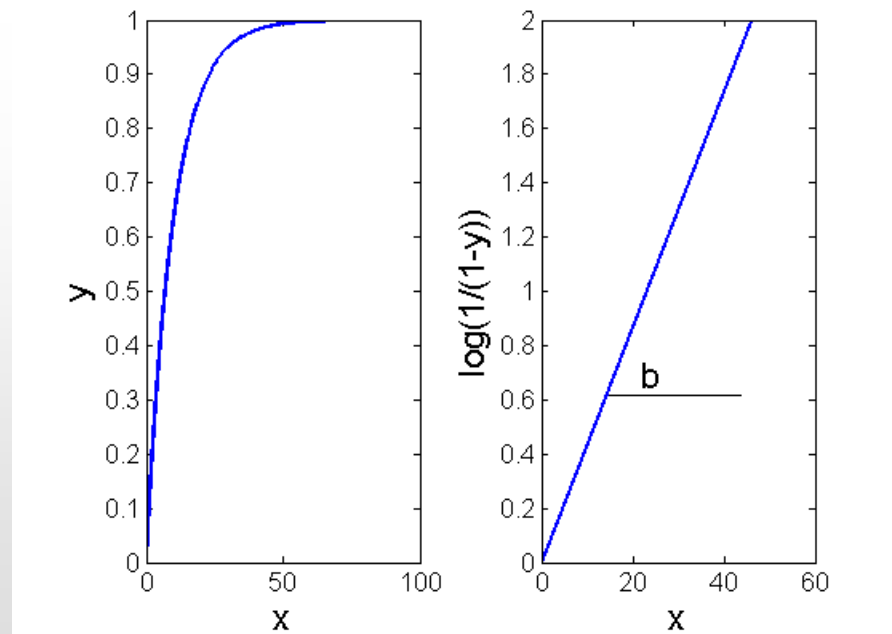
Aula de Medidas Dinâmicas

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = 1 - e^{-bx}$



Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

$$\text{Ex.: } y = a + b\sqrt{x}$$

