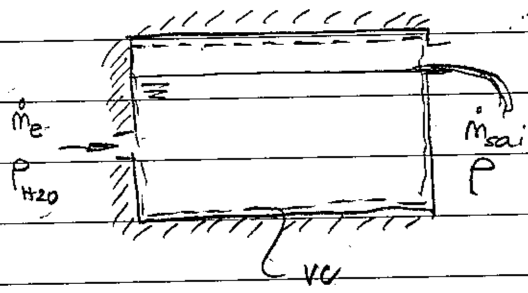
• P2 de 3/11/2009

① Um tanque de volume fixo contém uma solução de água e sal com massa específica inicial ρ_i, maior que a da água pura. Água pura entra no tanque e mistura-se perfeitamente com a solução salina. O nível do tanque permanece constante. ~~Assumindo regime permanente~~ deduza expressões para:

a) a taxa de variação da massa específica da mistura líquida no tanque

b) o tempo requerido para que a massa específica da mistura atinja o valor ρ_f, sendo $\rho_i > \rho_f > \rho_{H_2O}$

Aplicando a conservação de massa ao VC mostrado e lembrando que o volume de solução é constante



eq. básica: $0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

hipóteses:

(1) $\forall_{tanque} = const.$

(2) ρ é uniforme no tanque

(3) esc. uniforme nas seções de entrada e saída

a) $0 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \forall) + \rho VA)_s - \rho VA)_e \quad \therefore \quad \forall \frac{d\rho}{dt} + \rho VA)_s - \rho VA)_e = 0$

se o volume é constante então $VA)_e = VA)_s$, então

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{(\rho - \rho_{H_2O})VA}{\forall} \quad (a)$$

separando as variáveis,

$$\frac{d\rho}{\rho - \rho_{H_2O}} = -\frac{VA}{\forall}dt$$

Integrando de ρ_i em $t=0$ até ρ_f em $t=t$

$$\int_{\rho_i}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho - \rho_{H_2O}} = -\frac{VA}{\forall}\int_0^t dt \Rightarrow \ln(\rho - \rho_{H_2O})\Big|_{\rho_i}^{\rho_f} = -\frac{VA}{\forall}t$$

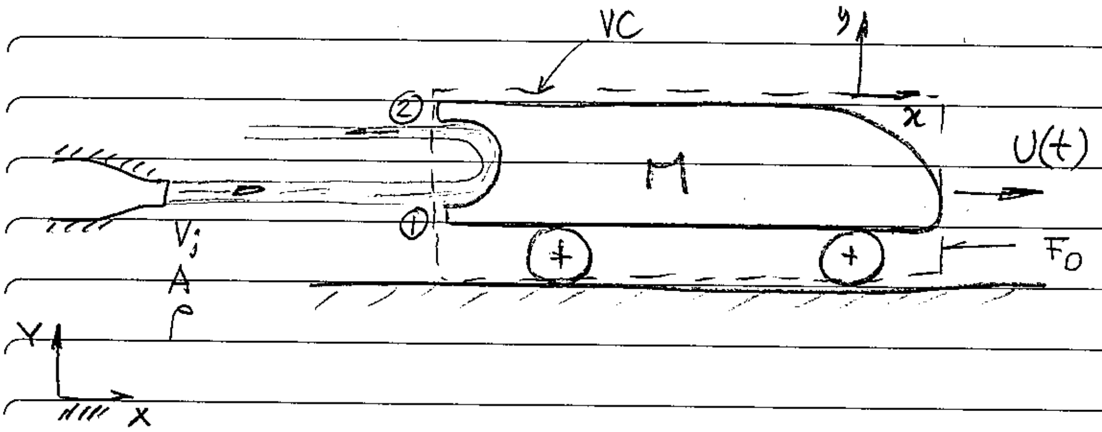
$$\ln \frac{\rho_f - \rho_{H_2O}}{\rho_i - \rho_{H_2O}} = -\frac{VA}{\forall} t \quad \therefore \quad \boxed{t = \frac{-\forall}{VA} \ln\left(\frac{\rho_f - \rho_{H_2O}}{\rho_i - \rho_{H_2O}}\right)}$$

---

(2) Partindo do repouso, o carro de massa M da figura é propelido por um jato de líquido. O jato atinge a curva e é defletido de 180° saindo na horizontal. Considere uma força de arrasto aerodinâmico ~~hidrodinâmica~~, $F_D = kU^2$, onde k é uma constante. Despreze o atrito de rolamento. Deduza expressões para:

a) a aceleração do carro

b) a velocidade terminal do carro



eq quant. mov. linear, dir x:

$$F_{S_x} + F_{B_x} - \int_{VC} a_{rf_x} \rho \, d\forall = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{xyz} \rho \, d\forall}_{\approx 0 \text{ (massa de água pequena)}} + \int_{SC} u_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$$

hipóteses:

(1) horizontal, $F_{B_x} = 0$

(2) desprezar a massa de líquido no VC (componentes de u cancelam)

(3) esc. uniforme nas seções

(4) seção do jato constante

$$-kU^2 - a_{rf_x} M = u_1\left[-\rho(V_j - U)A\right] + u_2\left[\rho(V_j - U)A\right]$$

$$u_1 = (V_j - U), \quad u_2 = -(V_j - U)$$

culeiū $a_{rf_x} = \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{2\rho(V_j - U)^2 A - kU^2}{M}$

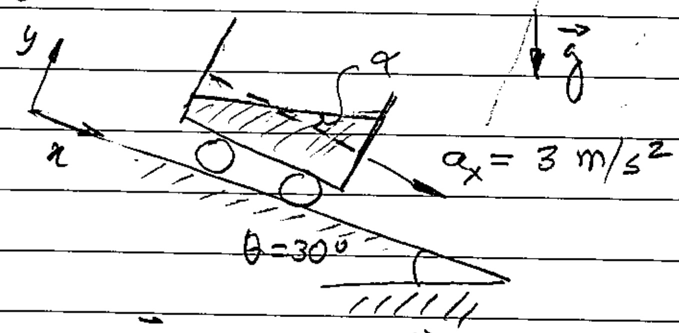
Velocidade terminal quando $a_{rf_x} = 0$

$$0 = 2\rho(V_j - U_t)^2 A - kU_t^2$$

$$U_t^2 = \frac{2\rho}{k}(V_j - U_t)^2 \quad \therefore \quad U_t = \sqrt{\frac{2\rho A}{k}}\,(V_j - U_t)$$

$$\therefore \quad U_t = \frac{V_j}{1 + \sqrt{k/_{2\rho A}}}$$

③ Um recipiente retangular desce um plano inclinado com uma aceleração constante. Determine a inclinação da superfície livre usando o sistema de coordenadas indicado.



eq. básica: $-\vec{\nabla} p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z$$

para o problema: $a_y = a_z = 0$

$g_y = -g\cos\theta$

$g_x = g\,sen\,\theta$

$g_z = 0$

assim, $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \operatorname{sen}\theta - \rho a_x$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\theta$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad \text{então} \quad p = p(x,y)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

na superfície livre $dp = 0$ ∴

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{sup} = \frac{-\partial p/\partial x}{\partial p/\partial y} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta - \rho a_x}{\rho g \cos\theta}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right)_{sup} = \frac{g \operatorname{sen}\theta - a_x}{g \cos\theta}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{sup} = \frac{(9{,}8)\operatorname{sen}(30) - (3)}{(9{,}8)(\cos 30)} = 0{,}22$$

$$\alpha = \arctan(0.22) \quad \therefore \quad \alpha = 12{,}6^{\circ}$$