

# Fenômeno de Transportes 1

## Capítulo 2

Luis Fernando Azevedo  
Laboratório de Engenharia de Fluidos  
DEM/PUC-Rio

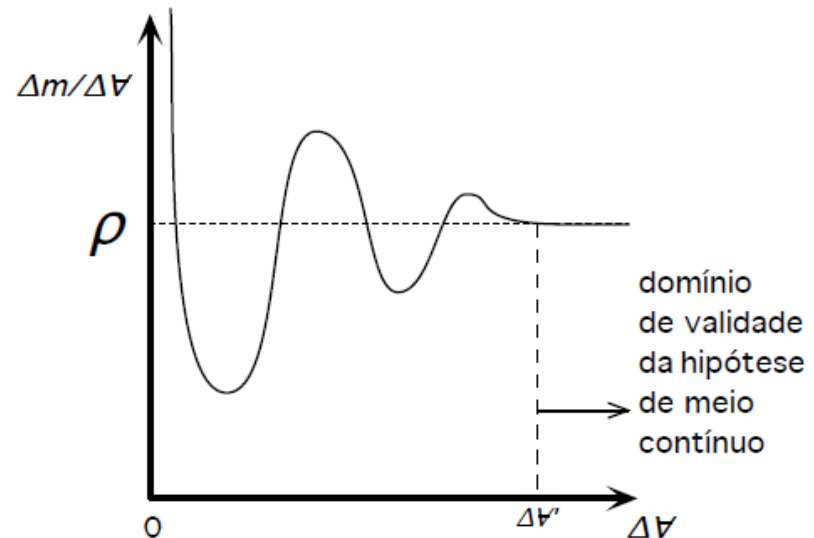
# A hipótese do meio contínuo

- Uma teoria completa para o movimento de fluidos deveria levar em consideração a estrutura molecular do fluido.
- A formulação das equações básicas para o movimento de cada molécula produziria um número muito grande de equações, tornando a solução do problema impraticável.
- Para condições normais de temperatura e pressão, existe uma formulação simplificada que produz excelentes resultados:  
**modelo de fluido como um meio contínuo**

# A hipótese do meio contínuo

- neste modelo **assume-se** que: *o fluido é um meio contínuo, no qual qualquer propriedade local do fluido permanece inalterada, não importando o tamanho da amostra examinada.*
- Considere, por exemplo, a propriedade massa específica,  $\rho$ , definida como,

$$\rho \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$



# A hipótese do meio contínuo

- A hipótese do contínuo falha quando  $\Delta \nabla$  é da ordem do caminho livre médio entre colisões moleculares
- Uma idéia de ordem de grandeza destes volumes:
  - considere um pequeno volume de gás nas CNTP de  $10^{-6} \text{ cm}^3$  (cubo de  $0,1 \times 0,1 \times 0,1 \text{ mm}$ ).
  - este volume é da ordem dos menores sensores disponíveis em laboratório
  - Este volume contém cerca de  $10^{16}$  moléculas, o que possibilita a utilização da hipótese do contínuo

# A hipótese do meio contínuo

- Algumas situações onde espera-se que a hipótese do meio contínuo falhe:
  - movimento de materiais particulados em suspensão no ar (aerossóis)
  - determinação da força de arrasto sobre satélites em órbita
  - número de *Knudsen*

$$Kn = \frac{\lambda}{L} = \frac{\text{caminho livre médio entre colisões}}{\text{dimensão característica do escoamento}}$$

# A hipótese do meio contínuo

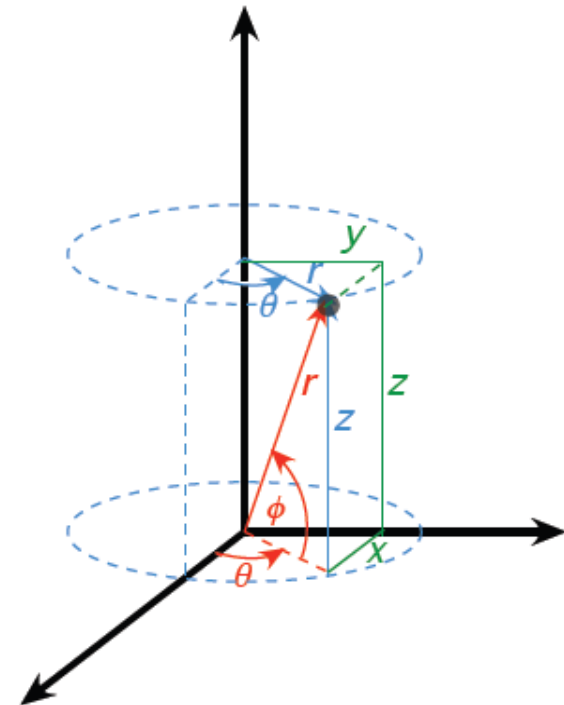
- Quando utilizamos a hipótese do meio contínuo
  - Qualquer propriedade é definida em todo espaço
  - Não há *vazios* no fluido
  - As propriedades podem ser representadas por *funções contínuas do espaço e do tempo*
  - Um *ponto* no escoamento passa a ser uma região muito pequena no escoamento, porém grande o suficiente para não violar a hipótese do meio contínuo

# Conceito de campo

- Podemos descrever as propriedades do escoamento em termos do conceito de campo e utilizar todo o ferramental matemático existente
- Seja  $\vec{x}$  o vetor posição e  $t$  o tempo,  $f(\vec{x}, t)$  é um campo descrevendo o valor de uma dada propriedade
  - Coordenadas cartesianas,

$$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$f(x, y, z, t) = f(r, \theta, z, t) = f(r, \theta, \phi, t)$$



# Exemplos de alguns campos de interesse

- Campos escalares

- Massa específica,  $\rho(\vec{x}, t)$

- Temperatura,  $T(\vec{x}, t)$

- Pressão,  $p(\vec{x}, t)$

- Campos vetoriais

- Velocidade,  $\vec{V}(\vec{x}, t)$

- Aceleração,  $\vec{a}(\vec{x}, t)$

- Força,  $\vec{F}(\vec{x}, t)$

- Campos tensoriais

- Tensão,  $\overline{\overline{T}}(\vec{x}, t)$

- Gradiente de velocidade,  $\overline{\nabla} \vec{V}(\vec{x}, t)$

- Taxa de deformação,  $\overline{\overline{D}}(\vec{x}, t)$



# O campo de velocidade: casos particulares

- De uma maneira geral, o campo de velocidade é tri-dimensional e dependente do tempo,

$$\vec{V}(\vec{x}, t) \quad \text{escoamento transiente, tri-dimensional}$$

- No caso de não haver dependência do tempo, tem-se o escoamento em regime permanente,

$$\vec{V}(\vec{x}) \quad \text{escoamento permanente, tri-dimensional}$$

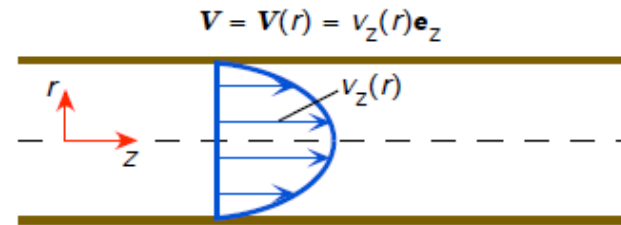
- O escoamento é uni, bi ou tri-dimensional, dependendo do número de coordenadas espaciais necessárias para descrevê-lo,

# O campo de velocidade: casos particulares

- escoamento 1-D,

~~$$\vec{V}(r, \theta, z) = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta + V_z \hat{e}_z$$~~

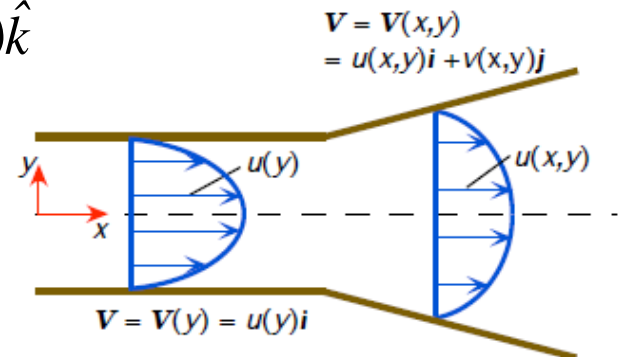
~~$$\vec{V}(r) = V_z(r) \hat{e}_z$$~~



- escoamento 2-D,

~~$$\vec{V}(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j} + w(x, y, z)\hat{k}$$~~

~~$$\vec{V}(x, y) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}$$~~



# Trajetória, linha de corrente e linha de tinta

São linhas que auxiliam a visualização e interpretação do escoamento,

- **Trajetoária:** *é a curva que descreve o caminho percorrido por uma partícula de fluido ao longo do tempo*

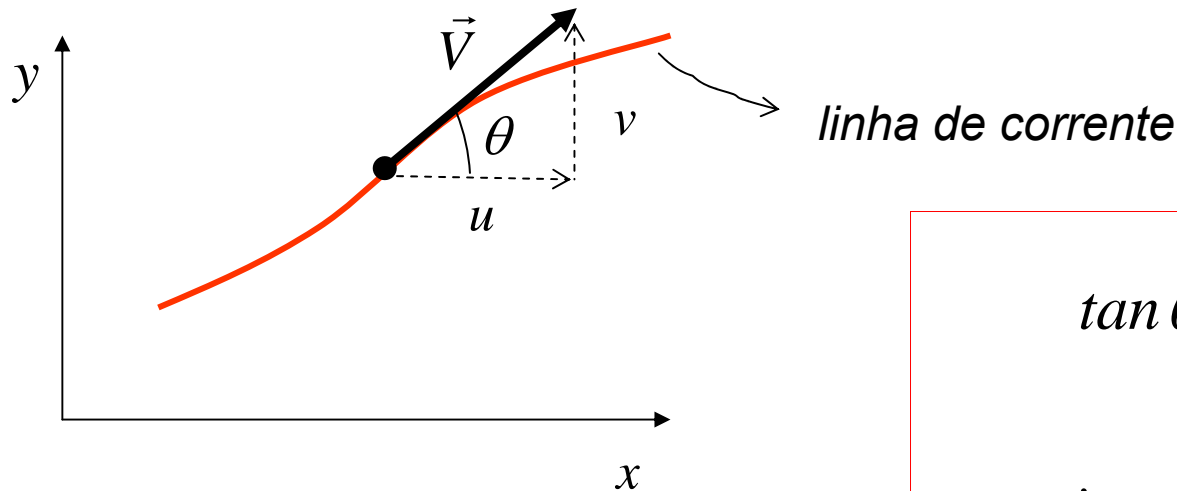
Para torná-la visível no laboratório, é necessário “*marcar*” uma determinada partícula e acompanhar seu movimento através de múltiplas fotografias

A equação da trajetória pode ser obtida pela solução simultânea das 3 equações diferenciais representadas por:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}(\vec{x}, t) \quad \text{com condições iniciais:} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \quad \text{em} \quad t = 0$$

- **Linha de corrente:** são curvas, passando por um dado ponto no espaço, que, para um dado instante de tempo fixo, são tangentes ao vetor velocidade em todos os pontos

Imagine um escoamento no plano  $xy$



$$\tan \theta = \frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$$

assim,  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$

- Obs: 1) não há fluxo de massa através de uma linha de corrente  
2) linhas de corrente não se cruzam

- Linha de tinta (linha de emissão)

Suponha que injetamos um corante continuamente em um ponto do escoamento com coordenadas  $\vec{x}_1$ , começando em  $t = T_1$  e observamos a linha de corante em um tempo posterior  $t = T_2 > T_1$

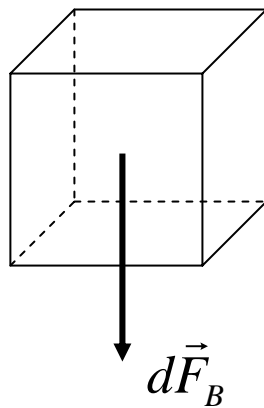
A linha de tinta é a curva formada por todas as partículas de fluido que no intervalo  $T_1 < t < T_2$  passaram por  $\vec{x}_1$

Em regime permanente, trajetória, linha de corrente e linha de tinta coincidem

# Campo de Tensão

As forças que agem em um elemento de fluido podem ser de dois tipos:

- **Forças de corpo (ou de campo):** forças devido à ação de campos que agem igualmente em todo o elemento à distância. Por exemplo, forças devido à ação do campo gravitacional, campos eletromagnéticos



$d\forall$ , elemento de volume

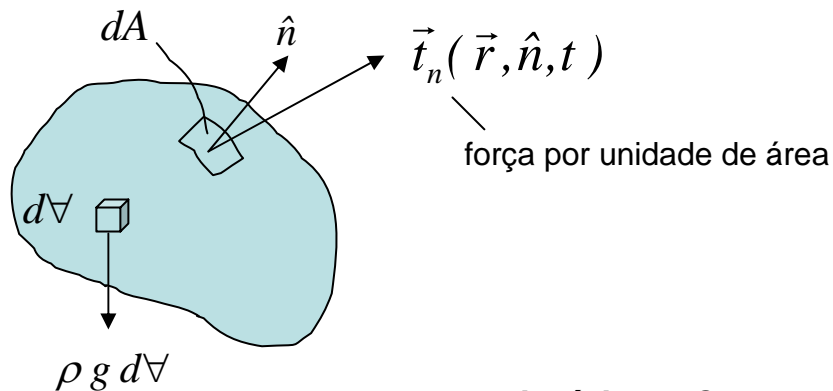
$$d\vec{F}_B = \rho \vec{g} d\forall$$

massa específica

aceleração local da gravidade

# Campo de Tensão

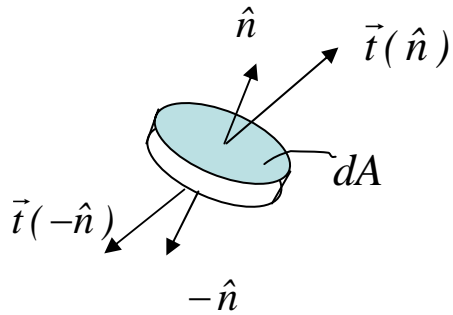
- **Forças de superfície:** forças devido ao contato do elemento com o material que o envolve. Esta força pode existir na fronteira com uma superfície sólida, ou quando se separa um elemento de fluido para estudo.



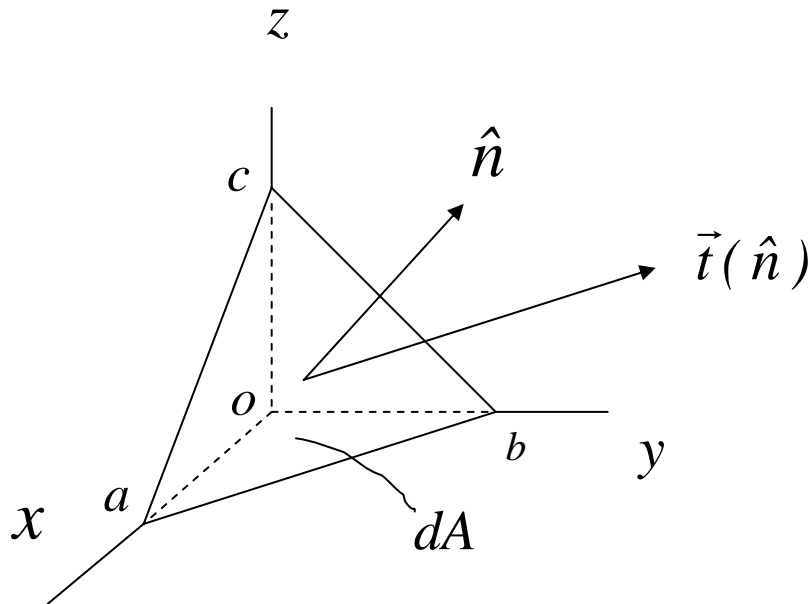
**Princípio de Cauchy das tensões:** em torno de qualquer superfície imaginária no material existe uma distribuição do vetor  $\vec{t}(\hat{n})$  cuja resultante e momento são equivalentes às aquelas causadas pelo material que envolve a superfície.

# Campo de Tensão

Pode-se mostrar que o elemento de fluido está em equilíbrio estático sob a ação das forças de superfície, mesmo quando em movimento

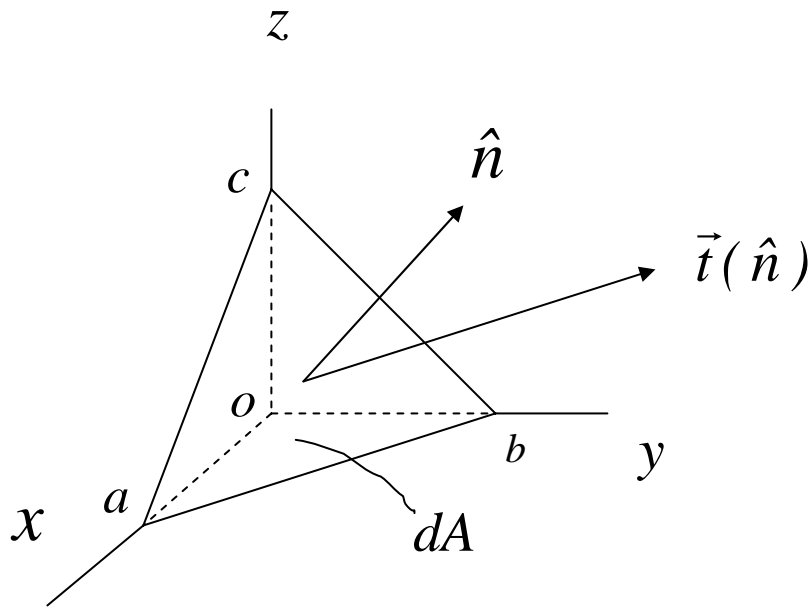


$$\vec{t}(\hat{n})dA = -\vec{t}(-\hat{n})dA \quad \therefore \quad \vec{t}(\hat{n}) = -\vec{t}(-\hat{n})$$



face	normal	área	força/área
$abc$	$\hat{n}$	$dA$	$\vec{t}(\hat{n})$
$oac$	$-\hat{j}$	$\hat{n} \cdot \hat{j} dA$	$\vec{t}(-\hat{j})$
$obc$	$-\hat{i}$	$\hat{n} \cdot \hat{i} dA$	$\vec{t}(-\hat{i})$
$oab$	$-\hat{k}$	$\hat{n} \cdot \hat{k} dA$	$\vec{t}(-\hat{k})$





face	normal	área	força/área
<i>abc</i>	$\hat{n}$	$dA$	$\vec{t}(\hat{n})$
<i>oac</i>	$-\hat{j}$	$\hat{n} \cdot \hat{j} dA$	$\vec{t}(-\hat{j})$
<i>obc</i>	$-\hat{i}$	$\hat{n} \cdot \hat{i} dA$	$\vec{t}(-\hat{i})$
<i>oab</i>	$-\hat{k}$	$\hat{n} \cdot \hat{k} dA$	$\vec{t}(-\hat{k})$

Para termos equilíbrio estático,

$$\vec{t}(\hat{n})dA + \vec{t}(-\hat{j})(\hat{n} \cdot \hat{j} dA) + \vec{t}(-\hat{i})(\hat{n} \cdot \hat{i} dA) + \vec{t}(-\hat{k})(\hat{n} \cdot \hat{k} dA) = 0$$

usando,  $\vec{t}(\hat{n}) = -\vec{t}(-\hat{n})$

$$\vec{t}(\hat{n}) = \vec{t}(\hat{j})(\hat{n} \cdot \hat{j}) + \vec{t}(\hat{k})(\hat{n} \cdot \hat{k}) + \vec{t}(\hat{i})(\hat{n} \cdot \hat{i})$$

$$\vec{t}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot [\hat{i} \vec{t}(\hat{i}) + \hat{j} \vec{t}(\hat{j}) + \hat{k} \vec{t}(\hat{k})]$$

$$\vec{t}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot [\hat{i} \vec{t}(\hat{i}) + \hat{j} \vec{t}(\hat{j}) + \hat{k} \vec{t}(\hat{k})]$$

$$\vec{t}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} \quad \overline{\overline{T}} \text{ é o tensor das tensões}$$

Para  $\hat{n}$  na direção dos 3 eixos coordenados  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ ,  
e escrevendo em termos dos componentes nas 3 direções,

$$\vec{t}(\hat{i}) = \hat{i}[\hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{i})] + \hat{j}[\hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{i})] + \hat{k}[\hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{i})]$$

$$\vec{t}(\hat{j}) = \hat{i}[\hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{j})] + \hat{j}[\hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{j})] + \hat{k}[\hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{j})]$$

$$\vec{t}(\hat{k}) = \hat{i}[\hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{k})] + \hat{j}[\hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{k})] + \hat{k}[\hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{k})]$$

$$\overline{\overline{T}} = \hat{i} \vec{t}(\hat{i}) + \hat{j} \vec{t}(\hat{j}) + \hat{k} \vec{t}(\hat{k})$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{T}} = & \hat{i}\hat{i}[\hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{i})] + \hat{i}\hat{j}[\hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{i})] + \hat{i}\hat{k}[\hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{i})] + \\ & + \hat{j}\hat{i}[\hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{j})] + \hat{j}\hat{j}[\hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{j})] + \hat{j}\hat{k}[\hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{j})] + \\ & + \hat{k}\hat{i}[\hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{k})] + \hat{k}\hat{j}[\hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{k})] + \hat{k}\hat{k}[\hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{k})] \end{aligned}$$

*log o a matriz de  $\overline{\overline{T}}$  é*

$$\left[ \overline{\overline{T}} \right] = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{i}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{i}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{i}) \\ \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{j}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{j}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{j}) \\ \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{k}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{k}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{k}) \end{bmatrix}$$

$$\left[ \overline{\overline{T}} \right] = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{i}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{i}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{i}) \\ \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{j}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{j}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{j}) \\ \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{k}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{k}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{k}) \end{bmatrix}$$

*notação usual,*

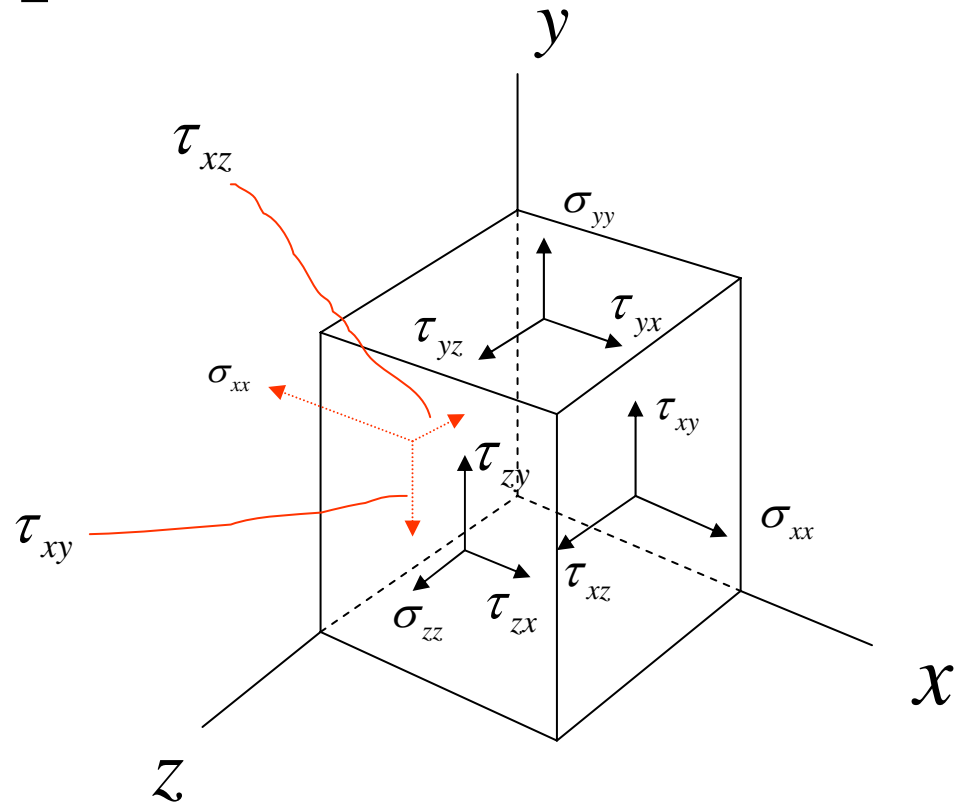
$$\begin{aligned} \overline{\overline{T}} = & \hat{i}\hat{i}\sigma_{xx} + \hat{i}\hat{j}\tau_{xy} + \hat{i}\hat{k}\tau_{xz} + \\ & + \hat{j}\hat{i}\tau_{yx} + \hat{j}\hat{j}\sigma_{yy} + \hat{j}\hat{k}\tau_{yz} + \\ & + \hat{k}\hat{i}\tau_{zx} + \hat{k}\hat{j}\tau_{zy} + \hat{k}\hat{k}\sigma_{zz} \end{aligned}$$

$$\left[ \overline{\overline{T}} \right] = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{i}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{i}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{i}) \\ \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{j}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{j}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{j}) \\ \hat{i} \cdot \vec{t}(\hat{k}) & \hat{j} \cdot \vec{t}(\hat{k}) & \hat{k} \cdot \vec{t}(\hat{k}) \end{bmatrix}$$

$$\left[ \overline{\overline{T}} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ou seja, na notação  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}$ , etc, o primeiro índice indica a face do cubo onde a tensão atua, o segundo índice indica a direção da tensão

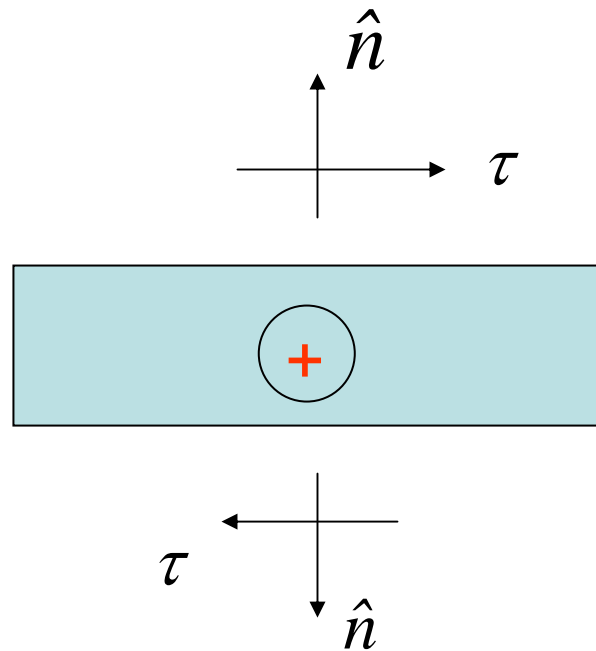
$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Os planos são considerados positivos de acordo com a sua normal

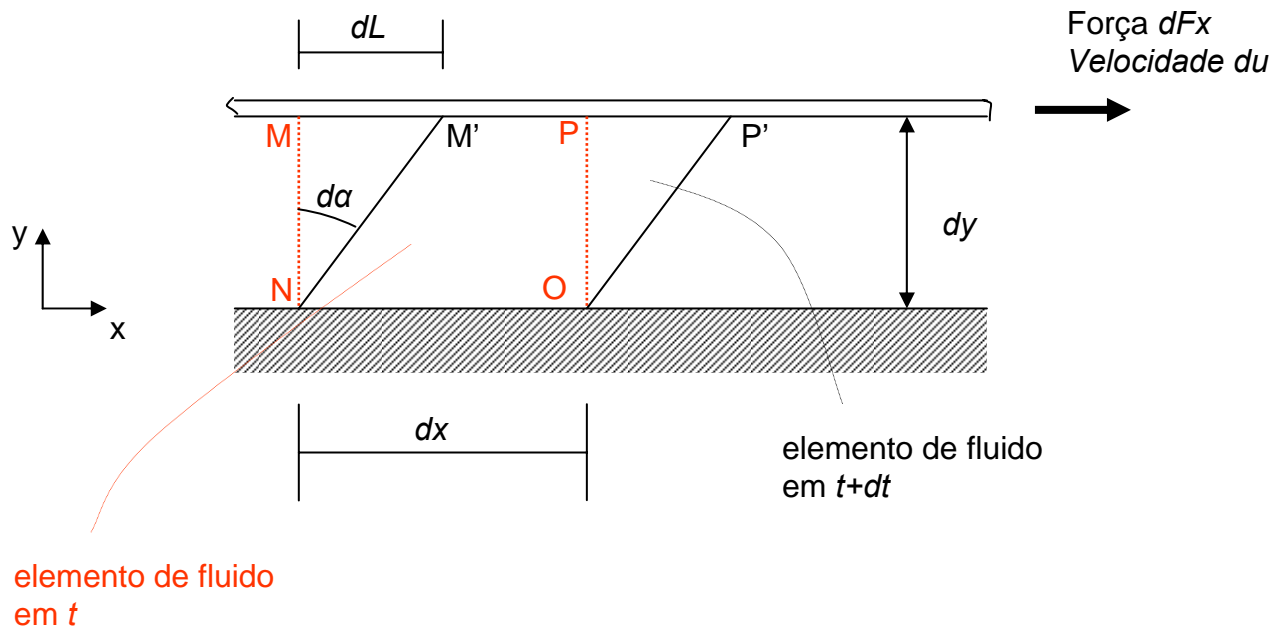
Convenção de sinais para a tensão:

Tensão positiva quando seu sentido e o plano onde atua são ambos positivos ou ambos negativos

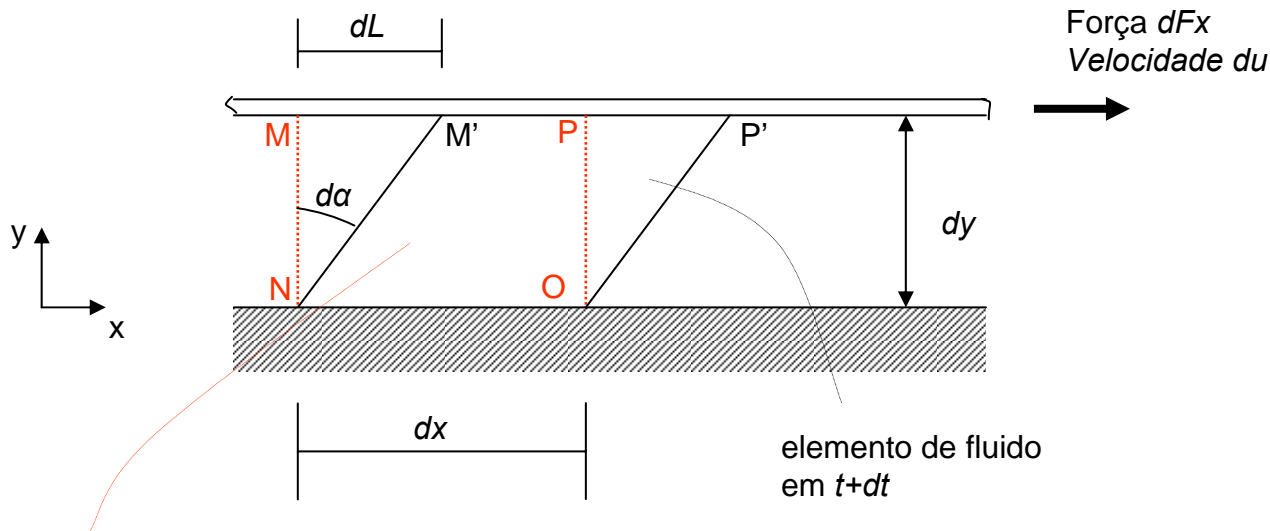


É importante conhecermos a relação entre a tensão aplicada e a taxa de deformação produzida no fluido.

Considere o elemento de fluido entre 2 placas paralelas infinitas







elemento de fluido em  $t$

A tensão cisalhante aplicada é:  $\tau_{yx} = \frac{dF_x}{dA_y}$

Durante o intervalo de tempo  $dt$ , o elemento é deformado de MNOP para M'NOP'. A taxa de deformação do fluido é dada por:  $\frac{d\alpha}{dt}$

Da figura,  $dL = du \cdot dt$        $dL = dy \cdot \tan(d\alpha)$        $\tan(d\alpha) \approx d\alpha$        $dL = dy \cdot d\alpha$

$$du \cdot dt = dy \cdot d\alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Qual a relação entre a **tensão de cisalhamento** e a **taxa de deformação**?

Hipótese:

Fluido Newtoniano: taxa de deformação é **linearmente** proporcional à tensão cisalhante.

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}, \text{ para escoamento uni-dim ensional}$$

$\mu$  : viscosidade dinâmica ou viscosidade absoluta

Unidade SI:  $[\mu] = \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] = [Pa \cdot s] = \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]$

Outra unidade:  $Poise : 1 \frac{g}{cm \cdot s}$     *centiPoise*  $cp : 10^{-2} \frac{g}{cm \cdot s}$

A viscosidade varia com a temperatura e com a pressão

Líquidos:  $\mu \downarrow$   $T \uparrow$  Forças intermoleculares de curto alcance

Gases:  $\mu \uparrow$   $T \uparrow$  Troca de quantidade de movimento entre moléculas em regiões adjacentes

É comum no estudo de mecânica dos fluidos aparecer a razão:  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Viscosidade cinemática:

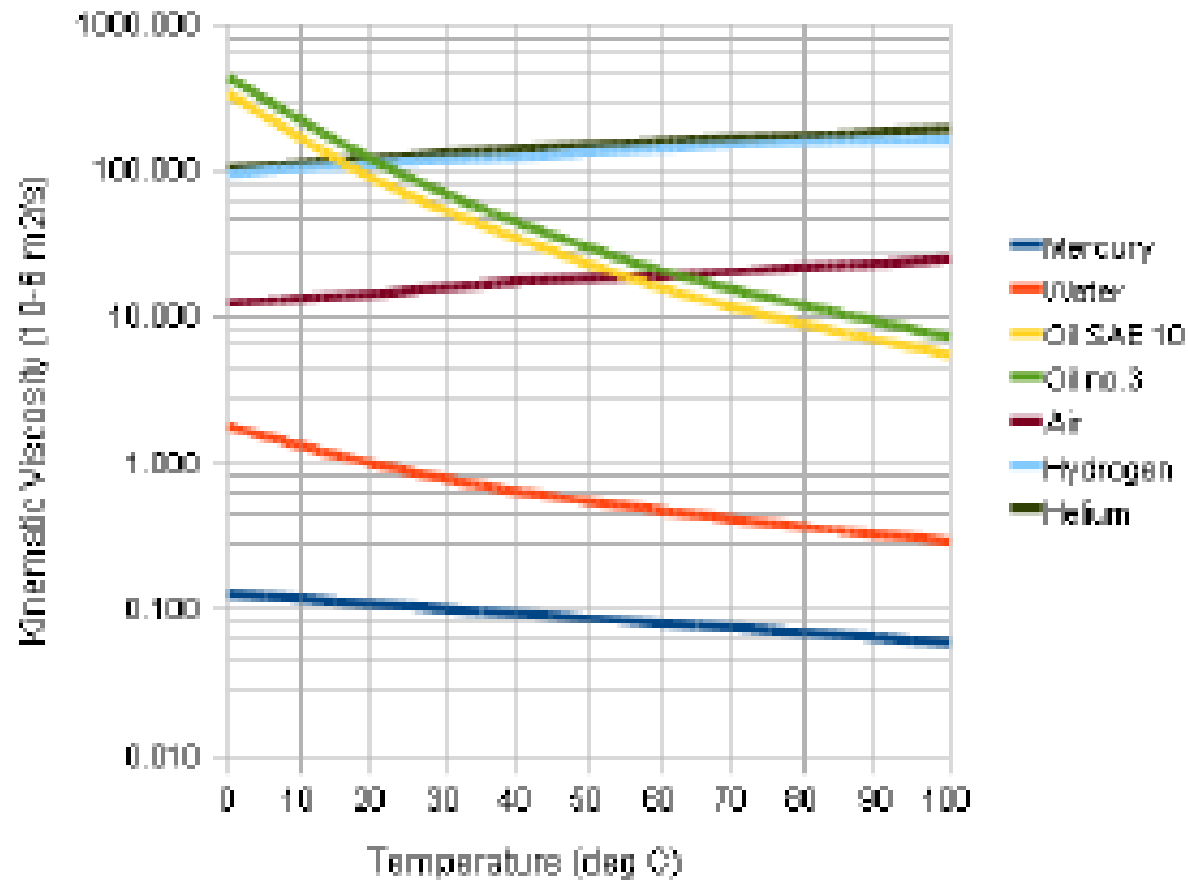
$$[\nu] = \frac{m^2}{s} \quad \text{no SI}$$

Outra unidade:

$$\text{Stokes} : 1 \frac{cm^2}{s} \quad \text{centi Stokes } cSt : 10^{-2} \frac{cm^2}{s}$$

# Kinematic Viscosity

## Some common Gases and Fluids



## **MATERIAL**

## **APPROXIMATE VISCOSITY (in centipoise)**

Water @ 70 F

1 to 5

Blood or Kerosene

10

Anti-Freeze or Ethylene Glycol

15

Motor Oil SAE10 or Mazola Corn Oil

50 to 100

Motor Oil SAE30 or Maple Syrup

150 to 200

Motor Oil SAE40 or Castor Oil

250 to 500

Motor Oil SAE60 or Glycerin

1,000 to 2,000

Karo Corn Syrup or Honey

2,000 to 3,000

Blackstrap Molasses

5,000 to 10,000

Exemplos numéricos....

# Fluidos não Newtonianos

- **fluidos que não obedecem à lei de Newton da viscosidade**
  - a lei de Newton só se aplica a gases e líquidos de micro-estrutura simples
  - para materiais de micro-estrutura mais complexa o comportamento mecânico é qualitativamente diferente
- **ocorrência na indústria**
  - Petróleo: fluidos de perfuração, petróleos pesados, emulsões, soluções poliméricas, etc.
  - Plásticos: polímeros fundidos, soluções poliméricas, etc
  - Extrativa: lama, argilas, suspensões de minérios, etc.
  - Alimentos: manteiga, ketchup, maionese, massasm pastsa, iogurte, etc..

# a função viscosidade

- a definição da função viscosidade é

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

$\tau$  é a tensão cisalhante. No escoamento simples de cisalhamento é  $\tau_{xy}$

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \quad \text{no mesmo escoamento}$$

- principais tipos de desvio do comportamento newtoniano
  - dependência com a taxa de cisalhamento
  - dependência com o tempo de cisalhamento
  - viscoelasticidade

# dependência com a taxa de cisalhamento

- Modelo *power law*

$$\tau = K \dot{\gamma}^n$$

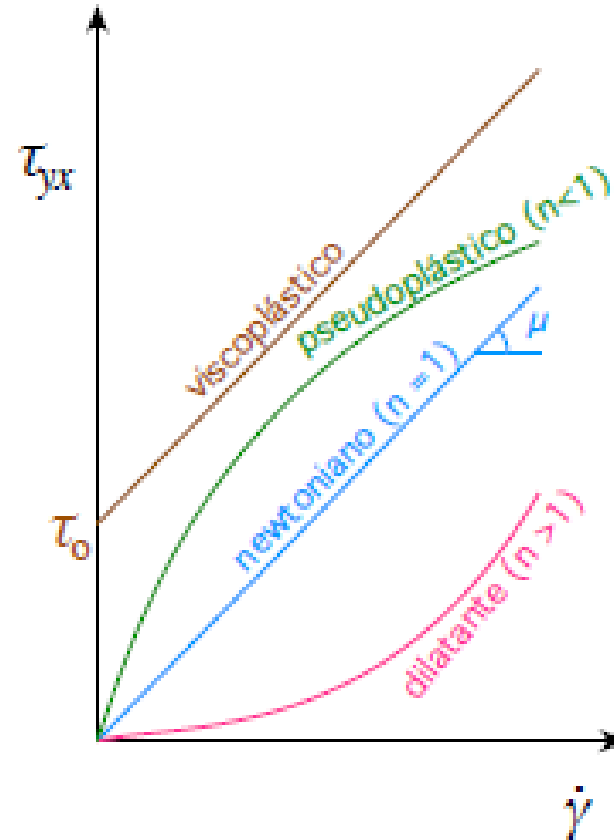
K: índice de consistência  
N: índice de comportamento

- Modelo de *Bingham*

$$\tau = \tau_0 + \mu_P \dot{\gamma}$$

$\tau_0$  tensão limite de escoamento

$\mu_P$  viscosidade plástica





- Fluido newtoniano

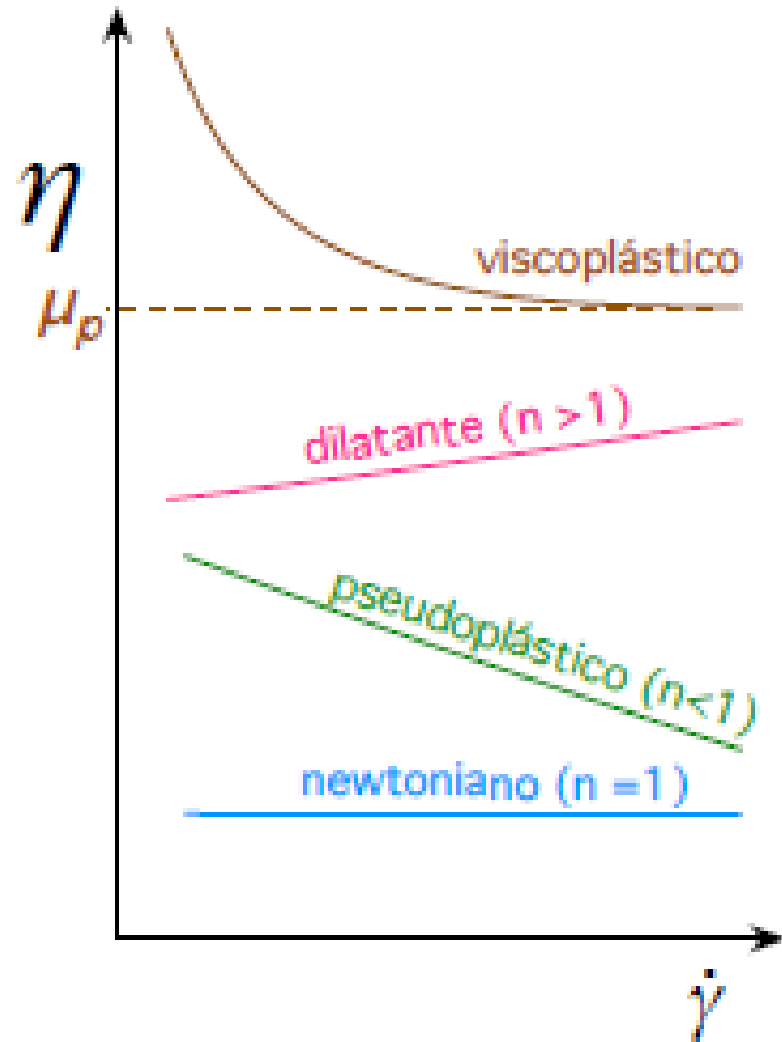
$$\eta = \mu$$

- Modelo *power law*

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}$$

- Modelo de *Bingham*

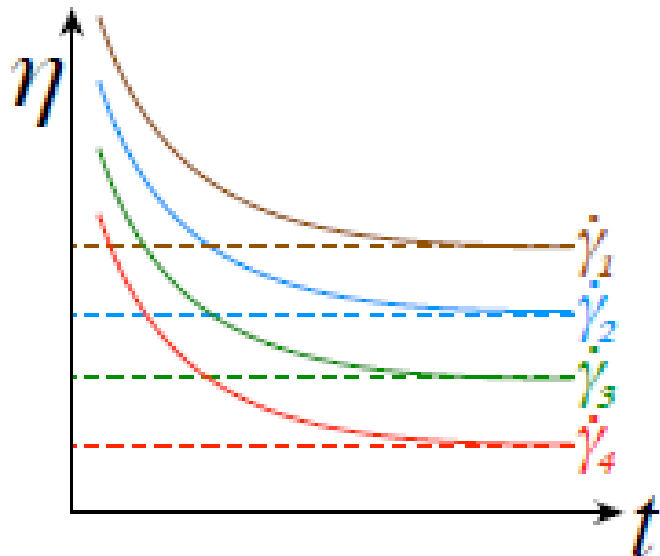
$$\eta = \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} + \mu_P$$



# dependência com o tempo de cisalhamento

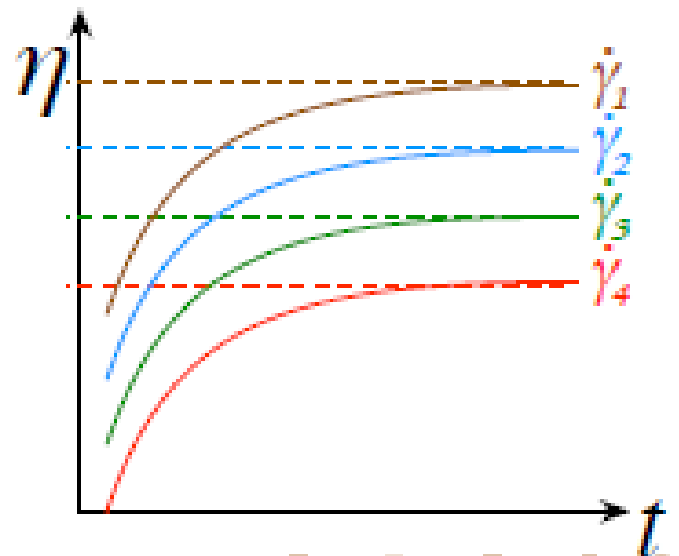
## Fluidos tixotrópicos

- *Viscosidade cai com o tempo de cisalhamento*
- *Exemplos: tintas, suspensões coloidais, emulsões*



## Fluidos reopéticos

- *Viscosidade cresce com o tempo de cisalhamento*
- *Exemplo: suspensões conc. de amido.*

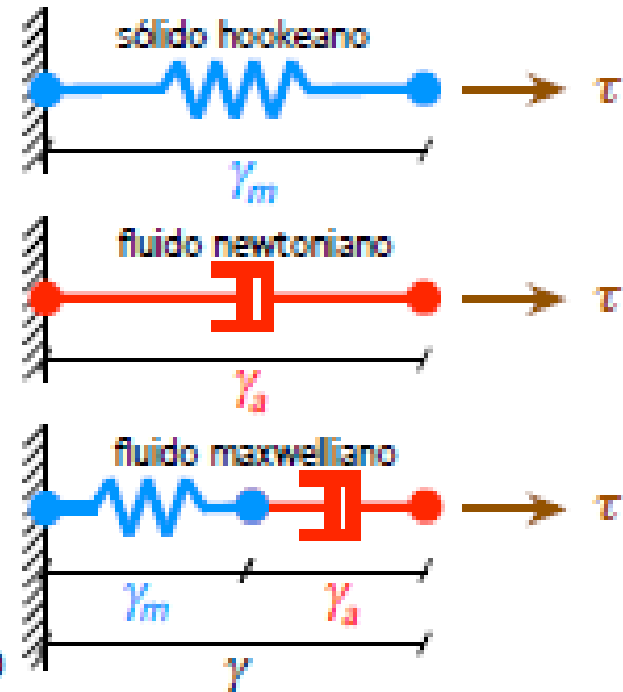


# Comportamento viscoelástico

- sólido hookeano:  $\tau = G\gamma_m$
- líquido newtoniano:  $\tau = \mu\dot{\gamma}_a$
- líquido maxwelliano:  $\gamma = \gamma_m + \gamma_a$   
logo,  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_m + \dot{\gamma}_a = \dot{\tau}/G + \tau/\mu$   
ou, definindo  $\lambda \equiv \mu/G$ ,

$$\tau + \lambda\dot{\tau} = \mu\dot{\gamma}$$

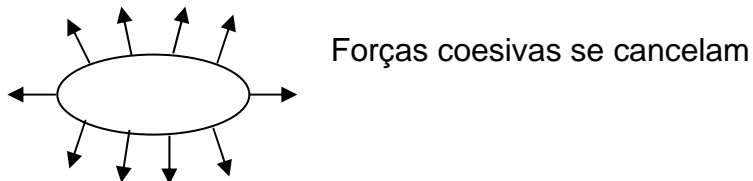
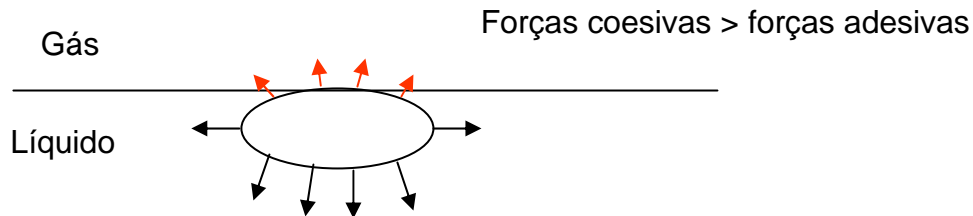
- $\dot{\tau}$  nulo: comportamento viscoso
- $\dot{\tau}$  grande: comportamento elástico
- caso geral: comportamento viscoelástico



# Tensão Interfacial

Uma assimetria entre forças intermoleculares gera uma tensão na interface líquido-gás ou líquido-sólido-gás

é devida a diferenças entre os níveis de forças de atração entre moléculas similares (**coesão**) e dissimilares (**adesão**)

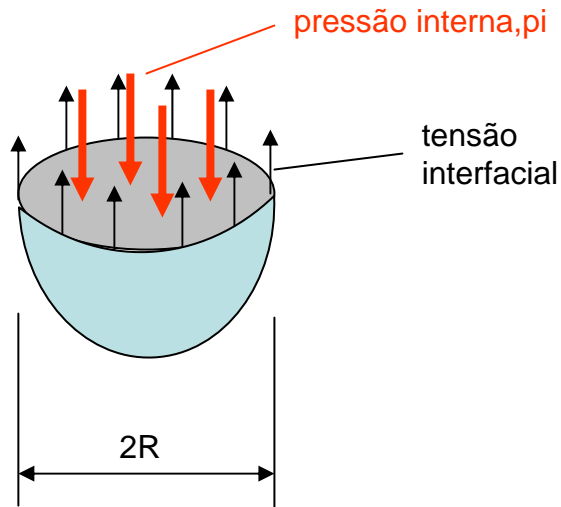


# Tensão Interfacial

Uma **força por unidade de comprimento** é gerada na superfície que define a interface: tensão interfacial  
age ortogonalmente a uma curva cortando a superfície

$\sigma$  : Tensão interfacial [N/m]

Considere uma gota de líquido imersa em um gás



No equilíbrio:

$$- p_i \pi R_i^2 + 2 \pi R \sigma = 0$$

$$p_i = \frac{2 \pi}{R}$$

pressão acima da externa

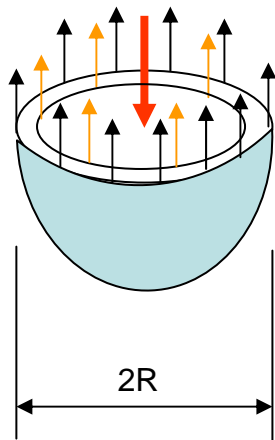
**exemplo:** cálculo da pressão interna em uma gota de água com 0,5 mm de diâmetro imersa no ar.

$\sigma = 0,0730 \text{ N/m}$  para água no ar (é função da temperatura e presença de substâncias químicas)

$$p_i = \frac{2 \cdot 0,0730}{0,5 \times 10^{-3}} \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{m}} = 292 \text{ Pa} = 0,0029 \text{ atm}$$

Considere agora o caso de uma bolha. Cortando a bolha, vemos que a tensão interfacial age em duas superfícies: interna e externa.

Assumindo o raio interno aproximadamente igual ao externo,



$$- p_i \pi R_i^2 + 2 [\sigma 2 \pi R] = 0$$

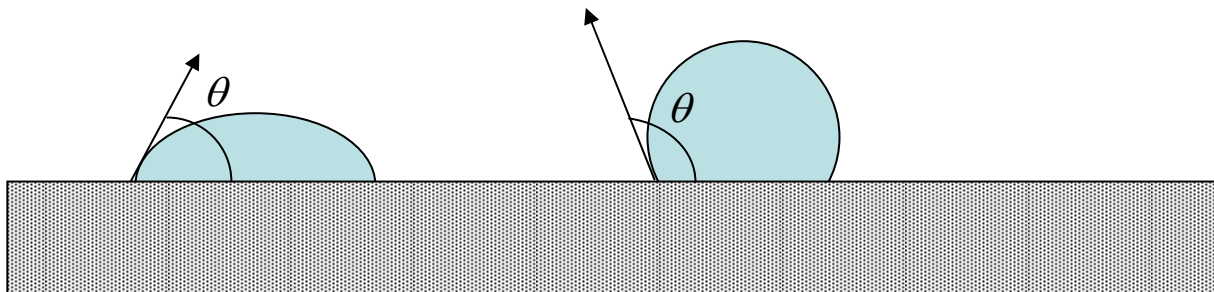
$$p_i = \frac{4 \pi}{R}$$

Pressão manométrica (acima da pressão externa)

Considere agora o caso onde o líquido está em contato com um sólido

O comportamento da superfície depende das forças de adesão ao sólido comparadas com as forças de coesão no líquido

Ângulo de contato



Molha

Não molha